Marta da Silva Teixeira A utilização de materiais manipuláveis e tecnologia no ensino e aprendizagem da fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau no 8º ano

UMinho|2012

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Marta da Silva Teixeira

A utilização de materiais manipuláveis e tecnologia no ensino e aprendizagem da fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau no 8º ano

Outubro de 2012

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Marta da Silva Teixeira

A utilização de materiais manipuláveis e tecnologia no ensino e aprendizagem da fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau no 8º ano

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob a orientação do
Doutor José António Fernandes

Outubro de 2012

DECLARAÇÃO

Nome: Marta da Silva Teixeira

Endereço eletrónico: martinhasteixeira@hotmail.com

Telefone: 910637731

Número do Bilhete de Identidade: 13399698

Título do Relatório:

A utilização de materiais manipuláveis e tecnologia no ensino e aprendizagem da fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau no 8º ano.

Supervisor:

Doutor José António Fernandes

Ano de conclusão: 2012

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

Universidade do Minho, 31 de outubro de 2012

AGRADECIMENTOS

Ao meu supervisor, Doutor José António Fernandes, pela sua constante disponibilidade e interesse em acompanhar este estudo, pelos comentários, sugestões e críticas determinantes para a conclusão deste trabalho.

Ao meu orientador, Mestre Paulo Ferreira Correia, pela disponibilidade, interesse e empenho demonstrado, por ter acompanhado este trabalho com entusiasmo e por transmitir tantas ideias positivas acerca do ensino da Matemática.

Ao Marcelo e à Sónia, meus amigos e companheiros de estágio, pela amizade, partilha de ideias e por terem tornado esta experiência inesquecível e agradável.

Aos alunos da turma, pela colaboração, empenho e carinho que demonstraram ao longo de todo o estágio.

À direção da escola e a todos os professores, por se mostrarem sempre disponíveis em ajudar na implementação do projeto.

Aos meus pais pela profunda dedicação, ajuda e amor que me concederam ao longo de todo este estudo.

Ao meu irmão e cunhada pelo carinho, preocupação e apoio incondicional.

Ao Luca pelo apoio, compreensão e paciência manifestada em todos os momentos deste estudo.

À Sarah e à Neta pela ajuda nas traduções que foram surgindo no desenvolvimento deste estudo.

Aos meus amigos pela presença e apoio constante.

A todos o meu sincero obrigado!

A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS E TECNOLOGIA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA FATORIZAÇÃO DE POLINÓMIOS E RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU NO 8º ANO

Marta da Silva Teixeira

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho, 2012

RESUMO

O presente relatório teve como principal propósito o estudo da utilização de materiais manipuláveis e da tecnologia no ensino e aprendizagem da fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau. Para tal, este estudo desenvolveu-se em torno de três objetivos: 1) Descrever a forma como foram usados os materiais manipuláveis e a tecnologia na realização das tarefas propostas; 2) Reconhecer vantagens e desvantagens do uso de materiais manipuláveis e tecnologia na factorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau; 3) Avaliar as perceções dos alunos sobre o uso de materiais manipuláveis e tecnologia na factorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau.

A intervenção de ensino realizou-se numa turma do 8º ano de escolaridade, constituída por 20 alunos, pertencente a uma escola do concelho de Barcelos.

Com o objetivo de motivar os alunos na aprendizagem e tornar essa aprendizagem mais significativa nos tópicos abordados, foram adotadas várias metodologias de ensino e aprendizagem. Essas metodologias centraram-se na realização de tarefas significativas para os alunos, na aplicação de recursos didáticos, especificamente o material manipulável *Algebra Tiles* e o *software GeoGebra*, e na valorização do trabalho de grupo e das discussões no grupo-turma. Além disso, como estratégias de investigação e avaliação da ação foram utilizadas as tarefas realizadas pelos alunos, as gravações das aulas da intervenção de ensino, uma ficha de avaliação por partes e uma entrevista.

Em termos de resultados, verificou-se que a forma como o *Algebra Tiles* e o *GeoGebra* foram utilizados facilitou aos alunos a aprendizagem da resolução de equações do 2º grau. Constatou-se, também, um maior número de vantagens do uso destes recursos didáticos do que de desvantagens. Relativamente às perceções dos alunos, verificou-se que a utilização do *Algebra Tiles* e do *GeoGebra* motivou a aprendizagem dos alunos e o empenho na realização das tarefas propostas. Além disso, o trabalho de grupo e as discussões no grupo-turma revelaram-se aspetos importantes para a aprendizagem dos alunos e verificou-se, também, que dos recursos didáticos utlizados o *Algebra Tiles* foi o preferido pelos alunos.

THE UTILIZATION OF MANIPULATIVE MATERIALS AND TECHNOLOGY IN THE TEACHING AND LEARNING OF POLYNOMIAL FACTORIZATION AND RESOLUTION OF SECOND DEGREE EQUATIONS IN 8TH GRADE

Marta da Silva Teixeira
Master in Teaching Mathematics in the 3rd Cycle of Basic Education and Secondary Education
University of Minho, 2012

ABSTRACT

The main purpose of the following report was the study of the utilization of manipulative materials and technology in the teaching and learning of polynomial factorization and resolution of second degree equations. In order to achieve this purpose, this study was developed around three objectives: 1) Describe the way how manipulative materials and technology were utilized in the resolution of proposed tasks; 2) Recognize advantages and disadvantages of the use of manipulative materials and technology in polynomial factorization and resolution of second degree equations; 3) Evaluate students' perceptions about the use of manipulative materials and technology in polynomial factorization and resolution of second degree equations.

The teaching intervention took place in an eighth grade class, which consisted of 20 students and pertained to a school belonging to the County of Barcelos.

With the purpose of motivating the students into learning and rendering the learning experience more significant in the addressed topics, various teaching and learning methodologies were adopted. These methodologies focus on the realization of significant tasks for the students, on the application of didactic resources, more specifically the manipulative material known as *Algebra Tiles* and *GeoGebra* software, and on the valorization of group work and group-class discussions. Moreover, tasks performed by the students, the recorded class teaching intervention, a test by parts and an interview were utilized as investigational strategies and action evaluation.

In regards to results, it was verified that the way *Algebra Tiles* and *GeoGebra* were used facilitated the learning of resolution of second degree equations. Also, a larger number of advantages than disadvantages were found regarding the utilization of these didactic resources. Relatively to the students' perceptions, it was found that the use of *Algebra Tiles* and *GeoGebra* motivated the students' ability to learn and effort in performing the proposed tasks. Moreover, the group work and group-class discussions revealed themselves as important aspects for student learning and, of the didactic resources used, *Algebra Tiles* was the preferred between the students.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I
INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se o tema em estudo bem como as suas finalidades, os seus objetivos e a sua pertinência no contexto da Educação Matemática. Por fim, é feita uma breve descrição da estrutura do relatório.

1.1. Tema, finalidades e objetivos

O tema escolhido para este projeto centra-se no estudo da utilização de materiais manipuláveis e tecnologia no ensino e na aprendizagem da fatorização de polinómios e da resolução de equações do 2º grau, no 8º ano de escolaridade. Os tópicos casos notáveis, fatorização de polinómios e equações do 2º grau estão inseridos na unidade "Sequências e Regularidades. Equações", do tema Álgebra.

É do conhecimento geral que a Álgebra é um tema importante da Matemática e é também um tema em que os alunos sentem bastantes dificuldades, sendo o seu principal propósito de ensino "desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação em contextos diversos" (Ministério da Educação, 2007, p. 55).

Para os tópicos que irei abordar será necessário o aluno "compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação" e "resolver equações do 2º grau a uma incógnita" (Ministério da Educação, 2007, pp. 56-57). Contudo, estes tópicos nem sempre são bem compreendidos e adquiridos pelos alunos, pois os professores limitam-se a transmitir os conhecimentos necessários para as aprendizagens dos mesmos sem se preocuparem com a verdadeira compreensão desses conceitos. Sendo assim, considera-se importante abordar estes tópicos recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia.

No entanto, o recurso a estes materiais didáticos nem sempre é vantajoso, uma vez que a sua adequada utilização depende de vários fatores, tais como o interesse do aluno perante o tema e a reação ao material a ser utilizado. Podemos então dizer que "na aprendizagem da matemática, como em qualquer outra área, os alunos estão dependentes do ambiente e dos materiais à sua disposição, de modo a permitir-lhes encontrarem resposta às suas necessidades de exploração, experimentação e manipulação" (Soares, 2005, p. 55).

No contexto desta problemática, estabeleceram-se para o projeto os três seguintes objetivos:

1) Descrever a forma como foram usados os materiais manipuláveis e a tecnologia na realização das tarefas propostas;

2) Reconhecer vantagens e desvantagens do uso de materiais manipuláveis e tecnologia na fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau;

3) Avaliar as perceções dos alunos sobre o uso de materiais manipuláveis e tecnologia na fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau.

1.2. Pertinência

A Álgebra é um dos quatro grandes temas matemáticos desenvolvidos ao longo dos três ciclos do ensino básico, sendo explicitamente referido no 2º e 3º ciclos.

Alguns autores defendem que o objeto central da Álgebra são os símbolos, donde podemos encarar o trabalho em Álgebra como a manipulação dos símbolos e das expressões algébricas. De facto, não devemos minimizar a importância dos símbolos pois, como defende Devlin (2002, p. 11), "sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria".

No entanto, este potencial da Álgebra pode também transformar-se numa limitação ao tornar-se incompreensível para o aluno. Deste modo, é fundamental o professor ser capaz de ajudar os alunos, tal como refere Soares (2005):

> o professor deve conhecer e entender os erros dados pelos alunos. Conhecer e entender os erros dados pelos alunos é muito importante na medida em que permite ao professor fazer inferências acerca do pensamento dos alunos e, seguidamente, atuando em conformidade, ajudá-los a ultrapassar esses erros (Soares, 2005, pp. 1-2).

Ponte et al. defendem ainda que é importante compreender as dificuldades dos alunos nesta área pois "o raciocínio em Álgebra requer a compreensão da linguagem algébrica, sendo por isso de grande importância compreender a natureza e origem das dificuldades dos alunos" (Ponte et al., 2008, p. 89).

É importante salientar que "a Álgebra é mais do que a manipulação de símbolos." (NCTM, 2007, p. 39). É necessário que os alunos compreendam "os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registar ideais e tirar ilações face a certas situações." (NCTM, 2007, p. 39).

No que se refere ao contexto de intervenção e pelas observações realizadas, considero que é importante desenvolver nos alunos capacidades de resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática, as quais, segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), constituem as três capacidades transversais que devem estar presentes no processo ensino/aprendizagem de Matemática ao longo de todo ensino básico. Consequentemente, tais capacidades devem estar também patentes no estudo da Álgebra.

"A resolução de problemas não só constitui um objetivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática." (NCTM, 2007, p. 57). Além disso, "ao aprender a resolver problemas em matemática, os alunos irão adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhe serão muito úteis fora da aula de matemática." (NCTM, 2007, p. 57).

O raciocínio matemático é importante no processo ensino/aprendizagem, pois

> ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática. Em todos os níveis de escolaridade, os alunos deverão perceber e acreditar que a matemática faz sentido, através do desenvolvimento de ideias, da exploração de fenómenos, da justificação de resultados e da utilização de conjeturas matemáticas em todas as áreas de conteúdo. (NCTM, 2007, p. 61)

A comunicação é essencial em qualquer área, incluindo a matemática. A comunicação na aula de Matemática reveste-se de um duplo papel: fornece informação sobre como decorre o processo de ensino/aprendizagem e é uma condição necessária para o seu desenvolvimento (Almeida & Fernandes, 2010).

> É uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática. Através da comunicação as ideias tornam-se objetos de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção. O processo de comunicação também contribui para a construção de significado e para a consolidação das ideias e, ainda, para a sua divulgação. (NCTM, 2007, p. 66)

1.3. Estrutura do relatório

O presente relatório de estágio está organizado em quatro capítulos. No capítulo I – *Introdução* – apresenta-se o tema escolhido, as suas finalidades, os seus objetivos bem como a sua pertinência.

O capítulo II – *Enquadramento Contextual e Teórico* – está dividido em três subcapítulos. No primeiro – *Contexto de intervenção* – é feita uma caraterização da escola e da turma onde foi implementado o projeto. No segundo – *O ensino e a aprendizagem da Álgebra* – discute-se a importância do ensino e da aprendizagem da Álgebra, destacando-se os erros e dificuldades sentidas pelos alunos nesta área da Matemática. Por fim, no terceiro – *Plano geral de intervenção* – são apresentadas as metodologias de ensino e aprendizagem utilizadas na intervenção de ensino e as estratégias de investigação e avaliação da ação.

No capítulo III – *Intervenção* – descrevem-se e analisam-se os resultados da intervenção de ensino. Esta análise é feita com base nas produções escritas dos alunos, nas discussões havidas nos grupos e no grupo-turma retiradas das gravações efetuadas e ainda com base nos instrumentos de avaliação realizados durante a intervenção.

Por ultimo, no capítulo IV – *Conclusões, Recomendações e Limitações* – apresentam-se e discutem-se os principais resultados da investigação com o intuito de responder aos objetivos propostos para este estudo. São, ainda, identificadas algumas limitações deste estudo e feitas algumas recomendações para futuros estudos.

CAPÍTULO II
ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo desenvolve-se ao longo de três secções. Na primeira secção descreve-se o contexto da intervenção, ou seja, é feita uma caraterização da escola e da turma em que foi implementado o projeto. A segunda secção refere-se ao ensino e aprendizagem da Álgebra, onde se tratam alguns dos erros dos alunos em Álgebra. Na terceira secção justificam-se as escolhas das metodologias de ensino e aprendizagem e das estratégias de investigação/avaliação da ação adotadas no projeto.

2.1. Contexto de intervenção

Neste subcapítulo caracteriza-se a escola e a turma onde foi implementado o presente projeto.

2.1.1. Caraterização da escola

A escola onde foi implementado o meu projeto de intervenção pedagógica supervisionada pertence ao concelho de Barcelos e é uma escola secundária com 3º ciclo. Neste momento, é constituída por 1205 alunos e 127 professores (92 pertencem ao quadro e 35 são contratados). O maior número de alunos concentra-se no secundário, formando 40 turmas na totalidade, sendo os restantes distribuídos pelos três níveis de ensino do 3º ciclo do ensino básico, os quais se dividem por 15 turmas.

No sentido de desenvolver a minha experiência de ensino, tornou-se importante, desde logo, conhecer os documentos oficiais da escola, tais como: o projeto educativo e curricular, o regulamento interno e o relatório de avaliação externa. Este último documento permitiu-me conhecer que a escola foi avaliada em "Bom" em todas as vertentes.

Igualmente importante foi conhecer as dinâmicas criadas entre os docentes. Pelo que pude verificar, em relação aos professores de matemática, estes facilmente trabalham em conjunto havendo, em consequência, troca frequente de materiais didáticos e partilha de estratégias de ensino. Na minha opinião, a cooperação entre professores é importante pois dá a cada professor a possibilidade de aperfeiçoar as suas práticas de ensino.

A escola não deve ser apenas um espaço onde há partilha de conhecimento em contexto sala de aula, deve existir também esta partilha em atividades extracurriculares. Para tal, como forma de melhorar o ensino e de envolver toda a comunidade educativa, esta escola desenvolve vários projetos, estando, no presente ano letivo, a ser implementados os seguintes: "Academia do rio"; "Arboreto de Barcelos"; "Clube europeu"; "Espaço +"; "*Extension lesson*"; "Gabinete de promoção para a saúde"; "*Mat xyz*"; "Museu de ciências naturais"; "Rede pequenos cientistas" e "Revista amanhecer". Considero, assim, esta escola uma escola dinâmica e sempre aberta a novos desafios. Cada projeto tem a sua especificidade e os seus objetivos, e todos eles são importantes; no entanto só irei fazer referência ao *Mat xyz*, pois foi o único projeto em que estive envolvida.

O projeto *Mat xyz* é um projeto que foi implementado na escola neste presente ano letivo. Este projeto "surge da necessidade de apoiar todos os alunos do 3º ciclo do ensino básico regular com mais dificuldades a Matemática, designadamente, os alunos com nível negativo à disciplina."[1] Além disso, o que se pretende com este projeto é

> garantir que todos os alunos do terceiro ciclo do ensino básico regular, com nível negativo a Matemática, possam usufruir de apoio pedagógico acrescido à disciplina, desde o início do ano letivo; prestar um apoio pedagógico diferenciado e mais individualizado aos alunos com nível negativo a Matemática; atender aos diferentes ritmos de aprendizagem, aos conhecimentos adquiridos nos anos de escolaridade anteriores, ao grau de desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático, à atitude face à Matemática e à postura em sala de aula (Correia, 2011).

Como forma de atender às diferentes características dos alunos, neste projeto eles dividiram-se em três grupos: *Matx*, *Maty* e *Matz*. Os alunos que pertencem ao grupo *Matx* são "alunos interessados e empenhados mas que revelam muitas dificuldades de aprendizagem"; os alunos que pertencem ao *Maty* são "alunos que embora revelem desinteresse e falta de empenho, o nível negativo resulta essencialmente de falta de estudo" e, por fim, os que pertencem ao *Matz* são "alunos desinteressados e com interesses divergentes com os da vida escolar, podendo revelar comportamentos pouco adequados para a sala de aula."[2]

É importante referir que eu e os meus colegas de estágio estivemos envolvidos neste projeto desde o início do ano letivo, prestando apoio a um dos grupos do 8º ano e, além disso,

---

[1] [2]Consultado em janeiro 8, 2012, em http://www.esbarcelos.pt/_mat_xyz

também realizamos durante o 1º período algumas das fichas de trabalho propostas para estes alunos.

Tive ainda a oportunidade de participar em outras atividades realizadas pela escola, tais como o jantar de Natal, a escola aberta, o canguru matemático sem fronteiras e o campeonato de jogos matemáticos. Posteriormente acompanhei os alunos à cidade de Coimbra, local onde se realizou o campeonato nacional de jogos matemáticos. Para mim, envolver-me nestas atividades tornou-se bastante enriquecedor uma vez que pude relacionar-me mais diretamente com professores e funcionários e também com outros alunos que não os da turma em que desenvolvi o meu estágio.

2.1.2. Caraterização da turma

O desenvolvimento deste projeto teve a participação dos alunos de uma turma do 8º ano de escolaridade, num total de 20 alunos, designados no presente relatório por $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ pertencentes à Escola antes caraterizada.

Esta turma era constituída por 9 rapazes e 11 raparigas, todos com idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos. Pela caraterização feita pelo diretor de turma, constatou-se que todos os alunos têm computador com acesso à Internet, sendo com o computador que grande parte dos alunos ocupava os seus tempos livres. Relativamente à Matemática, 14 destes alunos referiram-na como sendo a sua disciplina preferida e apenas 1 aluno referiu ser a disciplina em que tem mais dificuldades. Apenas 12 alunos da turma pensam ingressar no ensino superior.

É de salientar que nesta turma não havia nenhum aluno repetente e havia um aluno com Necessidades Educativas Especiais (NEE). Relativamente a este último aluno, a observação que fui fazendo desde o início do ano letivo permitiu-me verificar que ele apresentava dificuldades na aquisição e assimilação de conhecimentos e que a sua relação com alguns dos colegas da turma não era boa.

A turma foi também caraterizada pelos professores como sendo uma turma faladora e, às vezes, um pouco mal comportada. Apesar disso, em geral, os professores consideraram-na uma turma razoável e amiga.

Através da avaliação diagnóstica realizada no início do ano, concluiu-se que, de um modo geral, os alunos revelaram dificuldades ao nível da resolução de problemas. Também sentiram muita dificuldade na simplificação de expressões numéricas recorrendo às regras operatórias das potências, tendo-se obtido uma média de 0,26 (num máximo de 2). A média da turma a

Matemática no 7º ano foi de 3,8 (numa escala de 0 a 5) e a média da turma no teste diagnóstico foi de 9,0 (numa escala de 0 a 18).

Em momentos de discussão com o professor orientador e com os meus colegas de estágio foi-me possível ter uma melhor perceção acerca de todos os alunos da turma. Em geral, segundo os elementos do grupo de estágio, os alunos demonstraram-se recetivos no que se refere à resolução das tarefas propostas, às atividades desenvolvidas nas aulas e aos recursos didáticos usados. Além disso, de uma maneira geral, tiveram uma participação ativa nas aulas.

O desempenho dos alunos ao longo do ano letivo foi sempre positivo, terminando com média bastante próxima do nível 4. Podemos observar este desempenho na tabela 1. É de salientar que no 3º período apenas um aluno da turma terminou com nível 2.

Tabela 1 – Desempenho dos alunos da turma, na disciplina de Matemática, ao longo do ano letivo

1º Período		2º Período		3º Período	
$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
3,47	0,83	3,43	0,85	3,95	0,94

Nota: $\bar{x}$ representa a média e s o desvio padrão das classificações obtidas pelos alunos.

2.2. O ensino e a aprendizagem da Álgebra

Nesta secção discute-se a importância do ensino e da aprendizagem da Álgebra, com destaque para os erros e dificuldades sentidas pelos alunos nesta área da Matemática, nomeadamente na resolução de equações.

2.2.1. Erros e dificuldades

Todo o processo de aprendizagem é acompanhado de erros e dificuldades. É importante o professor identificar esses erros e dificuldades para, assim, melhorar o processo de aprendizagem do aluno.

Alguns dos erros cometidos pelos alunos na resolução de equações do 2º grau advêm principalmente dos erros cometidos na resolução de equações do 1º grau e na simplificação de expressões algébricas. Kieran (1992) refere-se a vários erros revelados pelos alunos na resolução de equações. No presente projeto apenas serão tratados alguns desses erros por serem os considerados na análise da ficha de avaliação por partes, que é tratada no capítulo III.

O erro de *transposição* consiste na aplicação incorreta da regra mudar de membro-mudar de sinal. Segundo Kieran (1992), o método de transposição é visto por muitos professores como uma versão simplificada do método de efetuar a mesma operação em ambos os membros, mas o mesmo não acontece com os alunos, que percebem estes métodos de forma diferente. Nesta situação, a autora refere que os alunos ignoram a simetria de uma equação, não operando sobre a equação como um objeto matemático. Vejamos o seguinte exemplo: na equação $3x+2=0$ o erro de transposição pode levar à equação $3x=2$.

O erro *adição incorreta de termos semelhantes* foi também referido por Kieran (2006). Como o próprio nome indica, os alunos adicionam incorretamente os coeficientes dos termos semelhantes da equação. Por exemplo, da equação $-3x+7x=9$ resulta a equação $-4x=8$.

O erro *eliminação de parêntesis* resulta da aplicação incorreta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica. Vejamos, por exemplo, a equação $3x\left(\frac{x}{2}-1\right)=-4x$. Nesta situação, os alunos após aplicarem a propriedade distributiva, obtêm a equação $\frac{3x}{2}-3x=-4x$. Este erro foi também referido por Kieran (1992) como sendo o erro de *uso de parêntesis*.

O erro *eliminação incorreta de denominadores* foi também detetado ao longo da intervenção. No entanto, não foi encontrado suporte teórico fazendo referência a este erro. Neste erro, os alunos eliminam os denominadores da equação sem antes reduzirem todos os termos da equação ao mesmo denominador. Por exemplo, da equação $2x\left(\frac{x}{2}-3\right)=-5x$ resulta a equação $2x(x-6)=-5x$.

2.3. Plano geral de intervenção

Nesta secção são apresentadas as metodologias de ensino e aprendizagem utilizadas durante toda a intervenção de ensino, justificando-se a sua relevância à luz da literatura e do contexto. Por fim, são ainda apresentadas as estratégias de investigação e avaliação da ação, justificando-se a sua pertinência.

2.3.1. Metodologias de ensino e aprendizagem

Nesta parte do relatório apresentam-se as metodologias de ensino e aprendizagem utilizadas na intervenção, especificamente: tarefas, trabalho de grupo, recursos educativos e discussões no grupo-turma.

Tarefas

Para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, as tarefas são instrumentos significativos no desenvolvimento dos alunos. Segundo Ponte et al. (1997), as tarefas devem despertar curiosidade e entusiasmo nos alunos, ou seja, devem apelar aos seus conhecimentos prévios e às suas intuições. Para estes autores, "as tarefas matemáticas em que os alunos se envolvem (...) proporcionam o ponto de partida para o desenvolvimento da sua atividade matemática" (p.73). Desta forma, o papel que o professor desempenha na escolha das tarefas a aplicar na sua aula é importante para que o processo de ensino e aprendizagem decorra de uma forma atrativa. Além disso, "as tarefas regulam a interação dos alunos com o professor, o comportamento do aluno na sua aprendizagem e o do professor na abordagem dos conteúdos matemáticos" (Viseu, 2009, p. 54).

Ponte (2005) destaca duas dimensões fundamentais das tarefas: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. Para este autor, o grau de desafio está relacionado com a perceção da dificuldade da tarefa e varia entre "reduzido" e "elevado", enquanto o grau de estrutura varia entre "aberto" e "fechado". Considera ainda que uma tarefa fechada é "aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas". (Ponte, 2005, p. 18).

O professor deve valorizar a realização de tarefas diversificadas durante o processo de ensino e aprendizagem, mas é fundamental que tenha um trabalho prévio e cuidado na escolha das tarefas. Cabe ao professor propor "tarefas motivadoras, matematicamente desafiantes, com um nível de dificuldade apropriado e sequenciado, que explicitem as diferentes representações dos conceitos de modo a ajudar os alunos a clarificar e a conectar as suas ideias" (Viseu, 2009, p. 57).

Trabalho de grupo

O trabalho de grupo é uma das metodologias indicadas por vários autores, sendo também preconizado nas orientações metodológicas dos programas de Matemática. Matos e Serrazina (1996) referem que o trabalho de grupo pode ajudar a promover mais reflexão, mais discussão entre os alunos e mais atividades de resolução de problemas. Para estes autores "podem existir efeitos positivos resultantes do trabalho de grupo na compreensão de conceitos, na comunicação e na motivação dos alunos." (Matos & Serrazina, 1996, p. 149).

Segundo Burns (1990), os alunos trabalhando em grupo sentem mais à vontade para "arriscar e tentar as suas ideias durante a resolução de problemas do que em aulas para toda a turma" (p. 25). É natural que os alunos, perante os seus colegas de grupo, se sintam mais à vontade para intervirem, exporem as suas ideias, pois não sentem que estão a ser avaliados pelo professor. Os alunos "sentem-se mais confortáveis a falar em pequeno grupo do que em grande grupo, num "meio sem ameaças" onde se vão progressivamente apropriando da linguagem matemática" (Martinho & Ponte, 2005, p. 276). Além disso, ao "falarem e ouvirem os colegas, clarificam significados e a construção pessoal do conhecimento, ao ser combinado com o dos outros, torna-se útil" (Martinho & Ponte, 2005, p. 276).

Esta forma de trabalhar pode também aumentar nos alunos o espírito de interajuda, uma vez que "ajudar os colegas pode ser útil aos melhores alunos, ao permitir-lhes observar processos conhecidos e refletir sobre eles a um nível superior" (Matos & Serrazina, 1996, p. 149). Todavia, este tipo de trabalho pode também "beneficiar os alunos com dificuldades desde que estes reconheçam a sua necessidade e tenham oportunidade de usar, de facto, as explicações recebidas" (Matos & Serrazina, 1996, p. 149).

Roa, Correia e Fernandes (2009) fizeram um estudo em que é feita referência às perceções dos alunos em relação ao trabalho de grupo. Nesse estudo nenhum aluno referiu que não tinha gostado de trabalhar em grupo e para 91% dos alunos o trabalho de grupo foi importante para surgirem ideias diferentes. No que diz respeito à realização das tarefas propostas, 17% dos alunos referiram que um elemento do grupo assumia a liderança e que os restantes elementos limitavam-se a seguir as suas ideias, 74% dos alunos mencionaram que todos os elementos do grupo contribuíram significativamente para a resolução dos problemas propostos. Para estes alunos, o trabalho de grupo aumentou também a sua participação nas tarefas propostas e todos os estudantes sentiram que o trabalho de grupo foi importante para aprender melhor e para 96% dos alunos esse método de trabalho foi importante para ultrapassar dúvidas e dificuldades.

Além das razões já aludidas, a opção pelo trabalho de grupo justifica-se pelo facto de que já antes da implementação do projeto os alunos trabalharam desta forma em todas as aulas e, além disso, era notório o desempenho dos alunos na realização das tarefas propostas com os colegas do grupo. Ao longo do ano letivo foram sendo feitas pequenas alterações nos grupos tendo em vista melhorar o seu funcionamento, tendo-se organizado os alunos em grupos de 3, 4 ou 5 elementos durante a implementação do projeto.

Para a constituição dos grupos teve-se em conta o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática, assim como o seu comportamento, tentando-se estabelecer uma certa heterogeneidade nos grupos. Em consequência, agruparam-se os 20 alunos da turma em 5 grupos, como se apresenta na tabela 2.

Tabela 2 – Constituição dos grupos de trabalho

Grupo	G_I	G_{II}	G_{III}	G_{IV}	G_V
Elementos do grupo	A_9 , A_{12} , A_{17}	A_1 , A_7 , A_{14} , A_{19}	A_5 , A_{10} , A_{13} , A_{16}	A_3 , A_4 , A_6 , A_8	A_2 , A_{11} , A_{15} , A_{18} , A_{20}

Recursos educativos utilizados

Certamente reconhecemos que binómios como conteúdos/metodologias, conteúdos/processos ou conhecimentos/capacidades são alguns dos aspetos problemáticos no ensino da matemática, refletindo-se assim nas dificuldades de aprendizagem dos alunos. Sendo assim, para se combaterem as dificuldades dos alunos, os professores devem apelar a recursos educativos para facilitarem os processos de ensino e aprendizagem, tais como os materiais didáticos.

Os materiais didáticos são construídos com uma intensão, ou seja, são considerados materiais que facilitam e motivam a aprendizagem dos alunos. Segundo Lopes (2010), estes materiais

> influenciam as atividades de ensino e aprendizagem, especialmente ao permitirem tornar mais concretas as ideias abstratas características da matemática. Aprender a utilizar os materiais didáticos que otimizem a função de todos os sentidos, designadamente ouvir, ver e sentir, certamente permitirá melhorar a aprendizagem dos alunos. (p. 45)

Existindo vários tipos de materiais didáticos, Graells (2000, citado em Botas, 2008) classifica-os em três tipos: os materiais convencionais, que podem ser livros, fotocópias e materiais manipuláveis; os materiais audiovisuais, que podem ser filmes, diapositivos e transparências; e as novas tecnologias, que podem ser computadores e calculadores. No presente projeto, relativamente a estes materiais didáticos, é dada especial ênfase aos materiais manipuláveis e à tecnologia.

Materiais manipuláveis. A utilização dos materiais manipuláveis no processo ensino e aprendizagem da Matemática é fundamental, tal como referem os próprios programas da disciplina de Matemática:

> Materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover atividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos. Naturalmente, o essencial é a natureza da atividade intelectual dos alunos, constituindo a utilização de materiais um meio e não um fim (Ministério da Educação, 2007, p. 71).

Tal como referem Mourão, Barros, Almeida e Fernandes (1993) para uma melhor compreensão e sistematização dos conteúdos matemáticos, o professor deve propor atividades que envolvam características peculiares, designadamente: atividades que permitam o uso de materiais manipuláveis; atividades lúdicas; atividades de discussão e reflexão; atividades individuais e atividades de aprendizagem por descoberta. Entre estas atividades, neste estudo destacam-se as atividades que permitem o uso de materiais manipuláveis.

Os materiais manipuláveis são objetos que envolvem fisicamente os alunos, permitindo assim que estes aprendam os conteúdos com mais interesse e motivação. Segundo Serrazina (1991), os materiais manipuláveis são "objetos, instrumentos ou outros media que podem ajudar os alunos a descobrir, a entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem" (p. 37). Estes materiais são também definidos por Reys (1971, citado em Matos & Serrazina, 1996, p. 193) como sendo "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia".

Segundo Moyer (2001), os materiais manipuláveis são objetos projetados para representar de forma explícita e concreta ideias matemáticas que são abstratas. Estes materiais têm muito apelo visual e táctil e podem ser manipulados pelos alunos através de experiências práticas. Para esta autora, os professores devem refletir sobre as representações dos alunos e ajudá-los a desenvolver cada vez mais compreensões abstratas, o que constitui um desafio no ensino da matemática pois muitos professores não têm as competências matemáticas para transformar ideias matemáticas em representações acessíveis aos alunos.

Várias investigações (e.g., Driscoll, 1983; Greabell, 1978; Raphael & Wahlstrom, 1989; Sowell, 1989; Suydam, 1986, citados em Moyer, 2001) revelam que os alunos que utilizam materiais manipuláveis na construção de conhecimentos obtêm melhores resultados que os que não utilizam. Desta forma, os materiais manipuláveis podem ser um recurso com forte potencial nas aulas de Matemática.

Contudo, é necessário ter consciência que estes materiais não substituem o professor, tal como refere Santos (2011) "não vêm para substituir o professor e sim para integrar-se às suas aulas" (p.10). O professor muitas vezes utiliza apenas o manual como recurso didático, deixando de parte o facto de que "os livros, mesmo sendo ilustrados com figuras de materiais manipuláveis, não substituem os próprios materiais, visto que, com eles, em um laboratório de Matemática, os alunos poderiam visualizar as situações propostas em determinado problema" (Santos, 2011, p. 15).

Segundo Nogueira (2005), o professor pode ter diferentes intenções aquando da utilização dos materiais manipuláveis. Pode, por exemplo, ser para facilitar a compreensão de um determinado conteúdo ou para motivar os alunos em problemas que exigem determinados conceitos matemáticos que sejam mais avançados. Esta autora refere ainda que é necessário o professor formular questões adequadas, que permitam ao aluno observar os aspetos importantes do material para a construção do conceito em causa, pois deve ter em mente que o aluno não constrói o seu conhecimento matemático manipulando apenas os objetos. Desta forma, todas as ações do professor devem ser muito bem pensadas, visto que a passagem das ações concretas para as abstratas deve ser cuidadosamente preparada (Nogueira, 2005).

Para Santos (2011), a utilização de materiais manipuláveis, além do envolvimento do aluno com os materiais, favorece ainda a relação dos alunos entre si e deles com o professor. Além disso, considera que as situações que ocorrem durante a exploração dos materiais aprofundam nos alunos vários saberes, "como saber fazer, saber questionar, saber dizer, saber argumentar, bem como, saber conviver e trabalhar coletivamente. Essas aprendizagens, sem dúvida, contribuem para a construção de conhecimentos e da autonomia para fazer escolhas e tomar decisões, gerando, também, ações de cidadania" (Santos, 2011, p. 19).

Para Leitze e Kitt (2000) uma forma de ensinar para compreender é a utilização de modelos concretos para introduzir conceitos em vez de concentrar somente no abstrato e simbólico. Referem ainda que um método em que têm tido sucesso é o que utiliza o *Algebra Tiles* como modelos concretos nas salas de aula de alunos do terceiro ciclo e secundário.

Este material é constituído por pequenas peças manipuláveis que se apresentam sob três formas: pequenos quadrados, quadrados maiores e retângulos. A medida do lado do quadrado grande é igual ao comprimento do rectângulo e a largura deste é igual à medida do lado do quadrado pequeno.

Para representar estes formatos existem duas cores: a cor verde que representa os valores positivos e a cor vermelha que representa os valores negativos.

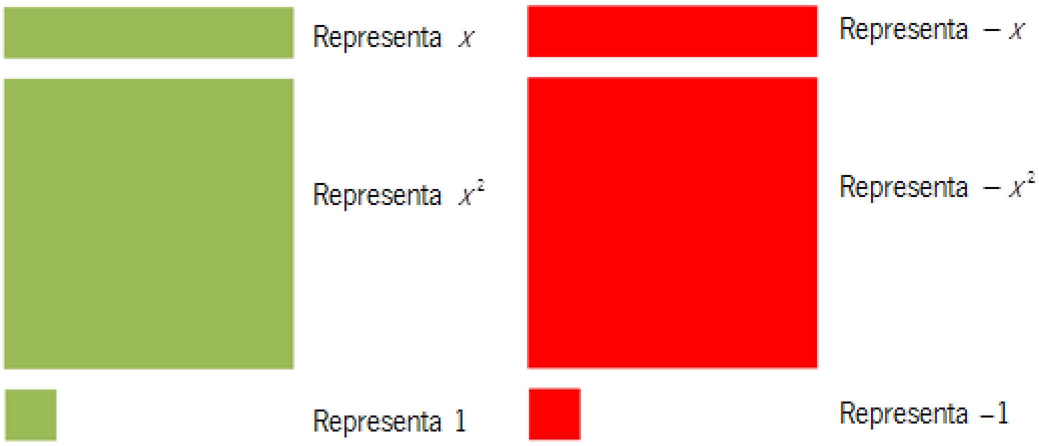


Figura 1. Peças que constituem o *Algebra Tiles*.

Leitze e Kitt (2000) referem que quando são introduzidos os conceitos algébricos nem o professor nem os alunos devem fazer trabalho abstrato mas devem depender do *Algebra Tiles* para resolver problemas e responder a perguntas. Num nível seguinte os alunos devem manipular o *Algebra Tiles* e fazer um esboço do que obtiveram. Eventualmente estes esboços vão se tornar representações mentais. Além disso, acreditam que alcançam um grupo mais amplo de alunos ao sequenciar a instrução a partir do nível concreto, passando pelo nível ilustrativo e finalmente para o nível abstrato ou simbólico.

Para estes autores o *Algebra Tiles* dá uma referência aos alunos que não são pensadores do abstrato.

Tecnologia. Hoje em dia, é cada vez mais recomendada a utilização de tecnologias nas aulas de matemática. É importante que esta seja uma das estratégias de ensino e aprendizagem desenvolvida pelos professores nas suas práticas, pois: "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (NCTM, 2007, p. 26). Além disso, tal como referem Fernandes e Vaz (1998), a utilização de tecnologia permite aos alunos uma aprendizagem mais profunda da matemática, contrariando-se, assim, a ideia de que a tecnologia implicaria uma aprendizagem menos exigente.

O computador, devido às suas potencialidades, "permite o desenvolvimento de atividades de exploração e pesquisa através de uma diversidade de programas que possibilitam abordagens enriquecedoras dos conceitos matemáticos" (Viseu, 2009, p. 59). Além disso, tal como referem Amado e Carreira (2008), os computadores motivam os alunos para a aprendizagem da Matemática. Para estes autores, um aspeto forte da utilização do computador é "a redução da ansiedade e do medo de cometer erros" (p. 288).

No que diz respeito à aprendizagem da Álgebra, as tecnologias representam recursos com grande importância. No entanto, "só por si, o seu uso não garante a aprendizagem dos alunos. Por isso, é necessário saber quando e como devem estes usar a tecnologia" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p.17). Além disso o uso de tecnologias cria, por vezes, "um ambiente de aula com mais movimento, mais ruído, mais sobressaltos e receios para o professor" (Amado & Carreira, 2008, p. 287).

Fernandes e Vaz (1998) defendem que a utilização de tecnologia nas aulas não dispensa o trabalho com papel e lápis. Trata-se, antes, de uma questão de integrar a utilização de tecnologia com outros meios de estudar matemática.

Tendo em vista uma utilização adequada da tecnologia nas aulas de matemática, Fernandes e Vaz (1998) justificam essa utilização na medida em que tem potencial para (1) promover uma aprendizagem mais profunda e significativa, (2) favorece uma abordagem indutiva ou experimental da matemática e (3) permite desenvolve as aplicações da matemática.

A visualização é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Para tal, a utilização da tecnologia "permite que o aluno explore uma maior variedade de situações, testemunhando a verdadeira natureza dos processos matemáticos e envolvendo-se em aplicações com dados realistas" (Amado & Carreira, 2008, p. 287). Além disso,

> as tecnologias vêm permitir investir em conhecimentos e capacidades de nível superior, tais como, saber interpretar um gráfico, fazer conjeturas, ser capaz de relacionar conceitos e utilizá-los, saber analisar criticamente os resultados obtidos, investigar, ser versátil em representações matemáticas diversas (Amado & Carreira, 2008, p. 287)

Desta forma, o facto de os alunos recorrerem a ferramentas tecnológicas faz com que, não só aprendam apenas matemática, como também aprendam novas formas de pensar e encontrem caminhos para desenvolverem a sua própria matemática. (Amado & Carreira, 2008).

Contudo, o manuseamento das tecnologias pode potenciar dificuldades e incompreensões por parte dos alunos se os professores não se certificarem que estes conhecem o modo como funcionam os instrumentos que têm à sua disposição. Assim, os professores devem ter consciência que ensinar os alunos a usarem devidamente a tecnologia que utilizam na aula de matemática faz parte do seu papel profissional.

A maior parte das dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem da Álgebra diz respeito ao trabalho com equações do 2º grau, nomeadamente

> reconhecer que uma equação do 2º grau é incompleta e resolvê-la usando as regras de resolução de equações e a lei do anulamento do produto; (...) interpretar as situações em que existe apenas uma raiz ou não existem raízes e traduzir condições verbais numa equação do 2º grau e interpretar as suas soluções, de acordo com as condições dadas. (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 155)

Na tentativa de atenuar estas dificuldades dos alunos nestas equações foi utilizado como recurso o *GeoGebra*. Este *software* matemático foi desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter em 2001, na Universidade de Salzburg, e é um *software* de acesso livre. Desta forma, permite aos alunos terem acesso ao programa fora do ambiente escolar. É importante que os alunos tenham fácil acesso às aplicações informáticas, que tenham acesso "fora do espaço sala de aula, fora da escola, possam explorar quer com orientações prévias, quer por sua iniciativa, situações problemáticas, ou mesmo consolidar conhecimentos" (Little, 2008, citado em Raposo, 2011, p. 38).

O *GeoGebra* é um *software* que incorpora todas as características de um programa de geometria dinâmica no plano. No entanto, devido às suas características semelhantes à da calculadora gráfica, o *GeoGebra* surge como uma ferramenta para o estudo da Álgebra (Carreira & Jacinto, 2011). Tal como sugere Ponte et al. (2009), este *software* permite "relacionar as informações dadas algebricamente com as representações gráfica e em tabela" (p. 16) e pode "servir de base à resolução de problemas e modelação de situações, constituindo importante suporte para a aprendizagem" (p. 17).

Discussões no grupo-turma

Um aspeto fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Matemática é a comunicação. A comunicação através da linguagem oral é

> imprescindível para que os alunos possam ouvir o que o professor tem a dizer, exprimir as suas ideias e confrontá-las com as ideias dos seus colegas. Esta comunicação é determinante no que os alunos aprendem acerca da disciplina, quer sobre os conteúdos e processos, quer sobre a própria natureza da Matemática. (Ponte & Serrazina, 2000, p. 118)

Umas das metodologias utilizadas na intervenção foram as discussões em aula. Segundo Ponte e Serrazina (2000), as discussões havidas na aula de Matemática são o modo mais importante de estabelecer a interação entre os alunos ou entre alunos e o professor. Também para estes autores, são muito diversas as situações em que estas discussões podem ocorrer. Podem "envolver participantes que têm ideias já bem definidas em relação a um dado assunto, e que argumentam as suas posições com convicção" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 121), mas também podem "envolver participantes que estão a fazer uma exploração inicial de um assunto, procurando "pensar em voz alta" em conjunto sobre ele." (Ponte & Serrazina, 2000, p. 121).

Ao longo de toda a intervenção, os alunos resolveram as tarefas propostas, discutindo as ideias no grupo de trabalho e, posteriormente, apresentarem essas ideias e as resoluções das tarefas ao resto da turma. Desta forma, proporcionava-se uma discussão no grupo-turma envolvendo todos os alunos, bem como a professora. Com estas discussões os alunos tiveram oportunidade de expor e discutir as suas ideias perante toda a turma e ao mesmo tempo ouvir as ideias dos restantes grupos. Estas discussões são muito úteis, permitem aprofundar a aprendizagem, pois "a participação ativa dos alunos na aprendizagem proporciona constantes oportunidades para discutir, colocar questões e reforçar a compreensão da Matemática e da sua ligação à vida corrente." (Ponte & Serrazina, 2000, p. 122).

2.3.2. Estratégias de investigação e avaliação da ação

Para avaliar a intervenção de ensino foram utilizados como instrumentos de recolha de informação, as tarefas realizadas pelos alunos durante toda a intervenção de ensino, a ficha de avaliação por partes realizada no final da intervenção e as entrevistas feitas aos grupos de alunos, que foram realizadas também no final da intervenção.

Tarefas realizadas pelos alunos na intervenção

No início da intervenção foi pedido aos alunos para responderem às tarefas propostas nas próprias fichas que lhes eram dadas, referindo tudo o que pensavam. Foi-lhes ainda pedido que no caso de se enganarem não apagassem totalmente a resposta, apenas riscassem ligeiramente de maneira a ser legível o erro que cometeram. No final de cada aula as fichas eram todas recolhidas para serem fotocopiadas e entregues novamente ao aluno na aula seguinte.

As tarefas realizadas pelos alunos durante a intervenção permitiram analisar a forma como foram usados os materiais manipuláveis e a tecnologia e ainda reconhecer vantagens e desvantagens do uso desses recursos.

Encontrava-se também em cada grupo de trabalho uma máquina de filmar para gravar as discussões e os comentários feitos pelos alunos nos respetivos grupos. Estava ainda disposta uma outra máquina de filmar que alcançava toda a sala de aula, com o intuito de captar as discussões ocorridas no grupo-turma, assim como as correções das tarefas que eram realizadas no quadro. Estas gravações foram devidamente autorizadas pelo diretor (Anexo I) da escola e pelos encarregados de educação dos alunos (Anexo II).

Ficha de avaliação por partes

Com esta ficha de avaliação por partes (Anexo III) pretendeu-se verificar as aprendizagens dos alunos nos conteúdos lecionados durante toda a intervenção de ensino e ainda averiguar se os alunos utilizaram livremente, no momento da avaliação, os materiais manipuláveis e a tecnologia usados nas aulas e de que forma os usaram.

A ficha de avaliação por partes tinha um total de cinco questões e foi realizada no final de toda a intervenção. Ao longo do ano letivo foram realizadas seis fichas de avaliação por partes, que juntas corresponderam a um teste. No capítulo III deste relatório é feita uma análise detalhada desta ficha de avaliação por partes.

Entrevistas

Com vista a avaliar as perceções dos alunos sobre o uso dos materiais manipuláveis e da tecnologia na fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau foi feita uma entrevista (Anexo IV) a cada um dos grupos de alunos.

A entrevista é um instrumento de recolha de dados privilegiado, uma vez que "é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo" (Bogdan & Biklen, 1994, p.134).

Optou-se por realizar uma entrevista semiestruturada pois, "o uso de entrevistas semiestruturadas permite adaptar as questões a colocar em função das respostas que vão sendo dadas pelo participante" (Nabais, 2010, p.123). Desta forma, as entrevistas seguiam um guião previamente definido, podendo, no entanto, alterar-se ligeiramente conforme o pensamento dos alunos.

As entrevistas foram realizadas por mim e com cada grupo de alunos numa sala da escola onde foi feita a intervenção. Na preparação da entrevista, tive o cuidado de que fossem realizadas num local calmo e sem ruído de maneira a que existisse privacidade.

Durante as entrevistas procurei não dar a minha opinião nem interferir nas respostas dos alunos, pois o meu objetivo era recolher a opinião dos alunos para depois analisá-las e compreendê-las.Todas as entrevistas foram gravadas com o consentimento de cada um dos alunos e dos seus encarregados de educação.

CAPÍTULO III
INTERVENÇÃO

Nesta secção vou analisar os dados que foram recolhidos nas aulas lecionadas com enfâse no projeto. Note-se que, sempre que forem apresentados esquemas desenhados pelos alunos, as peças a sombreado representam as peças vermelhas. De seguida apresento uma tabela com um resumo da intervenção, contemplando os objetivos das aulas e as tarefas que foram elaboradas para as mesmas.

Tabela 3 – Organização da intervenção de ensino centrada no projeto

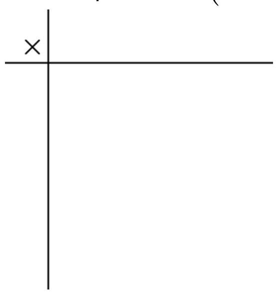
Aula	Tarefas	Objetivos da aula
1 (90 minutos)	**1.** Quadrado da soma **2.** Quadrado da diferença	– Compreender os casos notáveis da multiplicação de polinómios: quadrado do binómio.
2 (90 minutos)	**3.** As partilhas do Sr. Joaquim **4.** Quadrado do binómio **5.** Áreas de quadrados **6.** O raciocínio do Samuel e o raciocínio da Tânia	– Consolidar conhecimentos sobre o quadrado do binómio.
3 (90 minutos)	**7.** Diferença de quadrados **8.** Aplicação da diferença de quadrados **9.** O raciocínio da Sofia **10.** O retângulo do Luís	– Compreender o caso notável diferença de quadrados. – Consolidar conhecimentos sobre os casos notáveis da multiplicação de polinómios.
4 (90 minutos)	**11.** A parábola como representação gráfica de uma função quadrática **12.** Número de soluções de uma equação do tipo $x^2 - c = 0$ **13.** Equações do 2º grau do tipo $x^2 + bx = 0, b \neq 0$	– Compreender que uma equação do 2º grau tem zero, uma ou duas soluções. – Resolver uma equação do 2º grau incompleta.
5 (90 minutos)	**14.** Equações do 2º grau completas **15.** Fatorização **16.** Resolução de equações do 2º grau	– Resolver uma equação do 2º grau completa. – Consolidar conhecimentos sobre a resolução de equações do 2º grau.
6 (90 minutos)	**17.** Áreas **18.** O quintal do Sr. António **19.** Põe em prática **20.** Os retângulos	– Consolidar conhecimentos sobre a resolução de equações do 2º grau.

7 (60 minutos)	Ficha de avaliação por partes.	– Avaliar a aprendizagem dos alunos no tópico lecionado. – Avaliar a implementação do projeto.

3.1. Casos notáveis

3.1.1. Quadrado do binómio

Com a primeira tarefa da primeira aula pretendia-se que os alunos chegassem ao desenvolvimento de $(a+b)^2$. Desta forma, foram apresentados nesta tarefa dois exemplos concretos em que os alunos tiveram que descobrir, através do *Algebra Tiles*, o seu desenvolvimento. Para a resolução desta tarefa foi facultado a todos os alunos o *Algebra Tiles*. Irei então analisar parte desta tarefa, apresentada a seguir, onde se pretendia que os alunos chegassem ao desenvolvimento de $(x+2)^2$.

> **a)**
>
> **1.** Recorrendo ao *Algebra Tiles* representa $(x+2)^2$.
>
> 
>
> $(x+2)^2 =$ ____________________

Por observação do enunciado da tarefa verificamos que já era dado aos alunos o esquema onde teriam que colocar as peças do *Algebra Tiles*. Era muito importante que os alunos tivessem presente a definição de potência para assim perceberem que $(x+2)^2 = (x+2)(x+2)$ e posteriormente colocar no esquema a multiplicação $(x+2)(x+2)$. Vejamos então o diálogo que ocorreu no grupo G_V, em que um dos alunos percebe que $(x+2)^2 = (x+2)(x+2)$ e apresenta a sua resposta.

A_{20}: O que estás a fazer A_{18}?
A_{18}: Porque olha... É ao quadrado! Por isso é duas vezes o mesmo valor. Olha, fica assim!

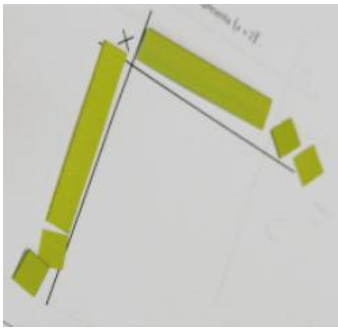


Figura 2. Resposta dada pelo aluno A_{18} .

Apesar de este aluno ter começado corretamente o preenchimento do esquema, teve dificuldade em aplicar a propriedade distributiva, o que o levou a uma representação incorreta de $(x+2)^2$. É de salientar que esta dificuldade foi geral, tal como se exemplifica na figura 3.

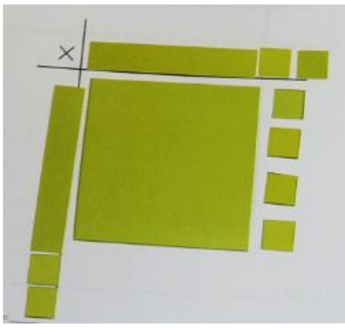


Figura 3. Resposta dada pelo grupo G_{II} .

Por observação da figura facilmente verificamos que os alunos não respeitaram as regras do funcionamento do material, apenas se limitaram a colocar no esquema o que para eles era o desenvolvimento de $(x+2)^2$, considerando assim que $(x+2)^2 = x^2 + 4$.

Note-se que o grupo G_{IV} não obteve a mesma resposta do grupo G_{II} . Este grupo aplicou a propriedade distributiva, mas não o fez de forma completa, como se constata no diálogo seguinte.

> A_8 : Professora?
>
> *Professora*: Sim.
>
> A_8 : Agora escrevemos aqui o resultado em números, não é?
>
> *Professora*: E já está tudo?
>
> A_8 : Não?
>
> *Professora*: Fica só assim? Como é que vimos que se faz essa multiplicação?
>
> A_8 : Isto vezes isto dá isto. [Aponta para o esquema]
>
> *Professora*: Sim! E só multiplicas essas peças? Esta multiplica por esta, e não multiplica por mais nenhuma?
>
> A_6 : Não, multiplicam pelas outras também.

Pelo diálogo constatamos que, ao contrário do que se verificou com os restantes alunos, este grupo teve em atenção as regras do funcionamento do *Algebra Tiles*. Contudo foi necessário a minha intervenção para que os alunos completassem devidamente o esquema.

Após a realização desta alínea, os alunos tiveram que fazer o mesmo mas para o caso $(x+3)^2$. Neste caso, os alunos não tiveram dificuldades em obter corretamente o seu desenvolvimento pois o processo era o mesmo do caso anterior. Vejamos então a alínea seguinte, desta mesma tarefa, onde se pretendia que os alunos encontrassem algebricamente as igualdades que encontraram nas alíneas anteriores com o *Algebra Tiles*.

c) Procura uma regra que te permita obter rapidamente as igualdades que escreveste em a2) e b2).

Professora: Já conseguiram descobrir a regra? Como é que será que conseguimos fazer $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ mais rápido?
A_{13} : Multiplicamos o x pelo expoente.
Professora: Então fica $2x$. É?
A_{13} : Ei!
Professora: Então o que é que aconteceu nos casos que vimos? Diz lá A_8.
A_8 : Temos que fazer o x elevado a dois e o três elevado a dois.
(...)
Professora: (...) E agora como obtemos o $6x$?
A_8 : Faço 2×3 que dá 6 e depois multiplicamos por x.

Pelo diálogo deteta-se um erro que é frequente nos alunos, considerar o quadrado de um número como o dobro desse número, como se verifica no aluno A_{13}. No entanto, o aluno A_8, bem como a maioria da turma, conseguiu obter uma regra para as igualdades que encontraram nas alíneas anteriores.

Para ficar uma melhor perceção da compreensão de todos os alunos, tive necessidade de chamar a sua atenção para o esquema que tinham obtido. No diálogo seguinte mostra-se a forma como os alunos ultrapassaram uma das suas dificuldades.

Professora: Mas porquê $2 \times 3 \times x$? Vamos olhar para o esquema. O que representa o $3x$ no esquema? [O esquema estava desenhado no quadro]
A_{12} : São os três retângulos.
Professora: E quantas vezes é que temos no esquema esses três retângulos?
A_6 : Duas vezes.
Professora: Então como obtemos o $6x$?
A_5 : $2 \times 3x$.
Professora: Ou seja, dizemos que é duas vezes o primeiro pelo segundo.

Através do diálogo verifica-se que, depois de os alunos observarem atentamente o esquema conseguiram facilmente perceber o porquê de um dos termos do desenvolvimento do binómio $(x+3)^2$ ser $6x$.Analogamente aconteceu com o termo $4x$ do desenvolvimento do binómio $(x+2)^2$.

Para concluir o desenvolvimento do quadrado da soma, foi proposta a seguinte alínea:

d) A partir das alíneas anteriores escreve o desenvolvimento da expressão $(a+b)^2$.

Na discussão no grupo-turma, relativamente a esta alínea, observou-se o seguinte diálogo:

Professora: Já fizeram a alínea d)? Diz lá A_{18}, como é que fica $(a+b)^2$?
A_{18}: Fica $a^2+b^2+(ab)^2$.
Professora: É isto?
A_8: Não, temos que ter $2ab$ em vez de $(ab)^2$.
Professora: Pois é. Percebeste A_{18}?
A_{18}: Era isso que eu tinha professora.

Repare-se que o aluno A_{18}, ao expressar-se, troca o dobro pelo quadrado ao dizer $(ab)^2$ em vez de $2ab$. Mais uma vez se nota a dificuldade que os alunos têm em se expressarem corretamente, uma vez que o aluno escreveu corretamente a resposta mas enunciou-a de forma errada.

Depois de os alunos concluírem esta tarefa o que se pretendia era que obtivessem o desenvolvimento de $(a-b)^2$. Foi apresentada então uma tarefa com a mesma sequência da anterior, ou sejam, foram apresentados inicialmente dois exemplos concretos. Como os alunos já tinham manipulado os casos apresentados na tarefa anterior com o *Algebra Tiles* foi fácil para os mesmos descobrir os desenvolvimentos dos casos apresentados agora nesta tarefa.

Considero que era muito importante que o uso do *Algebra Tiles* fizesse com que os alunos ultrapassassem o erro mais comum, ou seja, que não fizessem $(a+b)^2=a^2+b^2$ ou $(a-b)^2=a^2-b^2$. Desta forma, era muito importante que ficasse presente nos alunos o esquema que obtinham com o *Algebra Tiles*. Repare-se então no seguinte diálogo:

Professora: Quando olho para o *Algebra Tiles* o que é que nós vemos sempre em todos?
A_{15}: O quadrado.

Professora: O quadrado grande ou pequeno?
Turma: O grande.
Professora: Muito bem. E que mais?
Turma: Retângulos.
Professora: Onde e como?
A_{13} : Encostados ao quadrado.
Professora: Mas têm que estar encostados em cima, do lado esquerdo,...?
A_{17} : Do lado direito.
A_9 : Nas laterais.
Professora: Lateralmente e em baixo. Mas quantos à direita e quantos em baixo?
A_{17} : Depende.
A_{18} : Depende do número de quadrados.
Professora: Muito bem, mas a relação entre os que estão encostados à direita e os que estão em baixo qual é?
Turma: É o mesmo.
Professora: É o mesmo número. Então se eu tiver quatro à direita quantos vamos ter no total?
Turma: 8.
Professora: E como fizeram a conta?
Turma: 4×2.
Professora: Pois, porque tenho quatro à direita e quatro em baixo. E quantos quadradinhos pequeninos vou ter em baixo?
(...)
Professora: No cantinho, em baixo, tem sempre um conjunto de quadrados pequenos. Já vimos que pode ser 4, 9, 16,.. Mas como é que chego a esse número?
A_8 : São as raízes quadradas.
Professora: Quase. Raízes quadradas de quem? $\sqrt{25}$ quanto é?
Turma: 5.
Professora: E $\sqrt{9}$?
Turma: 3.
Professora: Então 5^2 dá 25, 3^2 dá 9... Mas que número é este? Onde é que no problema aparece este número?
A_{17} : Ali! [Aponta para o número 2 que está em $(x-2)^2$]
Professora: Isso! Muito bem!

Por observação do diálogo pode-se concluir que ficou presente nos alunos que esquema obtinham com o *Algebra Tiles*, ou seja, que obtinham sempre um quadrado grande, retângulos e quadrados pequenos. Como já referi pretendia então que os alunos não cometessem o erro mais comum pois, ao pensarem no esquema saberiam que teriam que obter sempre três termos, isto é o termo em x^2, o termo em x e o termo independente.

A tarefa que se apresenta de seguida diz respeito à tarefa 3 da segunda aula. Com a primeira alínea desta tarefa pretendia-se que os alunos interpretassem a informação do enunciado e a apresentassem sob a forma de um esquema. O objetivo era também averiguar se os alunos usavam o *Algebra Tiles*.

O Sr. Joaquim tem um terreno com a forma de um quadrado. Certo dia decidiu fazer as partilhas desse terreno da seguinte forma: • À mulher deu duas partes do terreno, cada uma, com a forma de um retângulo de comprimento a e largura 5 • Ao filho deu uma parte do terreno com a forma de um quadrado de lado a • Ao sobrinho deu uma parte do terreno com a forma de um quadrado de lado 5 **a)** Apresenta um esquema do terreno já dividido.

Vejamos então o diálogo do grupo G_{III}, e a respetiva resposta, relativamente à resolução desta alínea.

A_5 : À mulher deu então dois retângulos.
A_{16} : De comprimento a e largura 5.
A_{10} : Não dá uma coisa tipo isto?
A_{13} : É! É isso!
A_5 : Porquê? Como é que sabes que os quadrados vão ser iguais? Um diz que tem lado a e outro lado 5.
(...)
A_{13} : Pronto daqui aqui é a, daqui aqui é 5.
A_5 : E o outro quadrado?
A_{13} : O outro quadrado fica aqui!
A_5 : Como?
[Pegam no *Algebra Tiles*]
A_5 : Só podes pegar num destes grandes, em dois retângulos e num dos pequenos. Agora quero ver como é que isto dá um quadrado.
A_{13} : Não dá!
A_5 : Pois não!
A_{13} : Ah! Já sei! Fica assim!
(...)
A_{13} : Já descobrimos!
A_5 : A área do Sr. Joaquim é $25+5a+5a+a^2$.

Por observação do diálogo verifica-se que os alunos tiveram dificuldade em perceber que o comprimento, a, do retângulo era igual ao lado do terreno quadrado dado ao filho e que a largura, 5, do retângulo era igual ao lado do terreno quadrado dado ao sobrinho. Desta forma, também tiveram dificuldade em obter o esquema pedido. Apenas o conseguiram fazer corretamente quando decidiram utilizar o *Algebra Tiles*. Nesta situação é notória a influência que o *Algebra Tiles* teve na resolução desta tarefa.

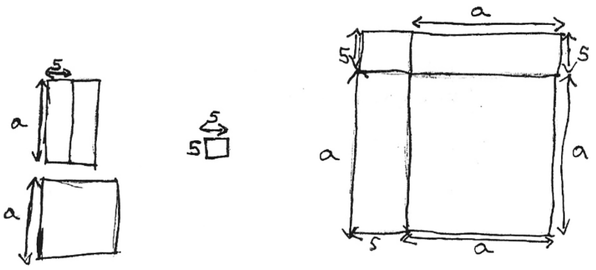


Figura 4. Resposta dada pelo grupo G_{III}.

3.1.2. Diferença de quadrados

A tarefa que irei agora analisar diz respeito à tarefa 7 da terceira aula.

a)

1. Recorrendo ao *Algebra Tiles* representa $(x+2)(x-2)$.

×

$(x+2)(x-2)$=____________________

b)

1. Recorrendo ao Algebra Tiles representa $(x+3)(x-3)$.

×

$(x+3)(x-3)$=____________________

Com esta tarefa o que se pretendia é que os alunos descobrissem o desenvolvimento da diferença de quadrados. Esta tarefa, tal como a primeira tarefa da primeira aula já analisada anteriormente, dividiu-se em dois exemplos concretos, o caso $(x+2)(x-2)$ e o caso $(x+3)(x-3)$, com o intuito de facilitar os alunos na descoberta do caso $(a+b)(a-b)$.

Nenhum aluno teve dificuldades em utilizar o *Algebra Tiles*. Toda a turma obteve com facilidade o esquema correto para representar $(x+2)(x-2)$ e $(x+3)(x-3)$.

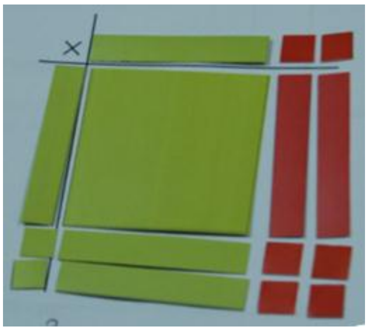


Figura 5. Resposta dada pelo grupo G_V .

Após todos os alunos terem resolvido esta tarefa seguiu-se uma discussão na turma. Quando se perguntou aos alunos o que obtêm sempre nos esquemas facilmente afirmam que obtêm sempre um quadrado grande, retângulos e quadrados pequenos. Esta discussão foi feita com o intuito de confrontar o que os alunos tinham obtido nos esquemas e as expressões que obtiveram para o desenvolvimento de cada caso. Vejamos o seguinte diálogo:

Professora: Lembrem-se das aulas anteriores, os retângulos eram de que cor?
Turma: Ou verdes ou vermelhos.
Professora: Mas por exemplo no caso $(x+2)^2$ eram verdes e vermelhos?
Turma: Não, eram só verdes.
Professora: E no caso $(x-3)^2$?
Turma: Todos vermelhos.
Professora: E agora aqui são todos verdes ou todos vermelhos?
Turma: Não.
Professora: Porquê?
A_{13} : Porque são duas coisas diferentes a multiplicar. Numa é um número positivo e noutra é um número negativo.
Professora: Pois, então vão aparecer retângulos de cores diferentes. E não podemos dizer mais nada em relação aos retângulos?
A_{20} : São o mesmo número?
Professora: É o mesmo número? Ou seja, se tivermos dois retângulos verdes...
A_{20} : Temos dois retângulos vermelhos.

Pela leitura do diálogo verifica-se que o aluno A_{13} percebeu que o facto de estarmos a multiplicar, por exemplo, $(x+2)$ por $(x-2)$ vamos obter os retângulos com cores diferentes. Além disso, como disse o aluno A_{20} os retângulos verdes são tantos quantos os retângulos vermelhos. Os alunos foram então questionados porque é que nos esquemas obtiveram retângulos e na expressão não têm nenhum termo em x. Facilmente afirmaram que isso se verificava pois, como tinham tantos retângulos verdes como vermelhos estes anulavam-se, logo não aprece o termo em x .

Com esta discussão também os alunos, confrontando os esquemas com as expressões obtidas, conseguiram concluir que os quadrados pequenos se obtém fazendo o quadrado do segundo fator em $(a+b)(a-b)$. Podemos constatar este facto no seguinte diálogo:

> *Professora*: Como vocês disseram temos também quadrados pequeninos. E o que podemos dizer desses quadrados?
> *Turma*: São vermelhos.
> *Professora*: E porquê?
> A_9: Porque quadradinhos vermelhos a multiplicar por quadradinhos verdes dão quadradinhos vermelhos.
> *Professora*: Mas agora olhando para os esquemas e para as expressões que obtiveram como é que chegamos ao 4, ao 9? Se fosse $(x+4)(x-4)$ o que dava?
> *Turma*: x^2-16.
> *Professora*: Muito bem! E então como é que chegaram ao 16?
> A_5: 4×4.
> *Professora*: E o que é esse 4×4.
> A_8: É 4^2.

É ainda importante referir que, pela leitura do diálogo, verifica-se que quando foram questionados os alunos como seria o desenvolvimento de $(x+4)(x-4)$, rapidamente responderam x^2-16. Por isto considero que o *Algebra Tiles* teve influência pois nesta altura ainda não tinha sido discutido com os alunos o desenvolvimento da diferença de quadrados no caso geral.

A tarefa que se apresenta de seguida diz respeito à tarefa 9 da terceira aula.

A Sofia diz que consegue transformar a expressão $(x+3)^2-4$ na expressão $(x+5)(x+1)$. Questionada como procedeu, a Sofia explicou que bastava ter em atenção que $4=2^2$. Qual foi o raciocínio da Sofia para dizer que $(x+3)^2-4=(x+5)(x+1)$?

Com esta tarefa esperava-se que os alunos assumissem que 4 pode ser escrito como 2^2, tal como era indicado no enunciado, para assim poderem aplicar a diferença de quadrados. No entanto, nenhum grupo o fez, todos os grupos resolveram esta tarefa recorrendo ao *Algebra Tiles*. É de salientar que nem todos os grupos utilizaram o *Algebra Tiles* do mesmo modo, sendo que o grupo G_{IV} apresentou uma resolução diferente dos restantes grupos. Na figura 6 exemplifico uma resolução com a resposta apresentada pelo grupo G_{III} e na figura 7 apresento a resposta dada pelo grupo G_{IV}.

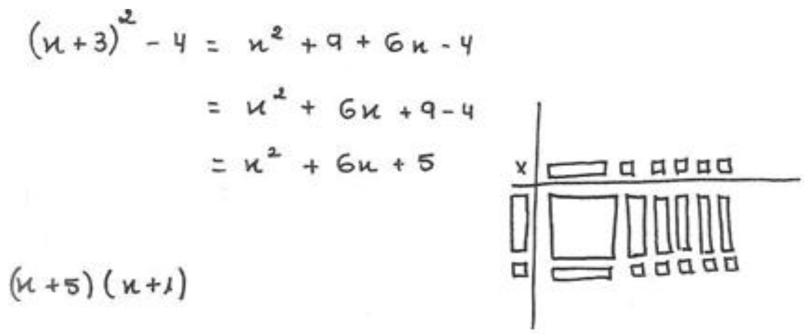


Figura 6. Resposta dada pelo grupo G_{III}.

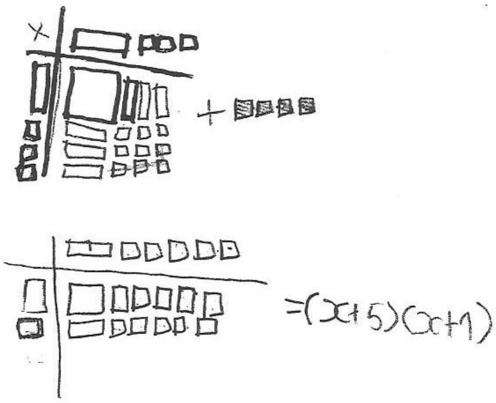


Figura 7. Resposta dada pelo grupo G_{IV}.

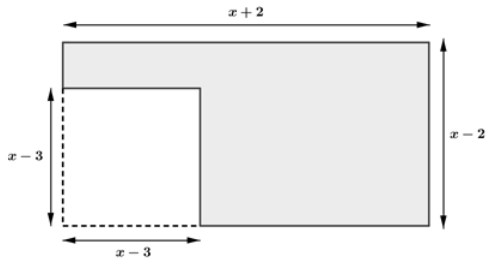
Por observação destas duas resoluções percebemos que os alunos facilmente utilizaram o *Algebra Tiles*, não tiveram qualquer dificuldade na sua manipulação. O grupo G_{III} observou que a expressão $(x+3)^2 - 4$ não se encontrava na forma para a utilização imediata do *Algebra Tiles*. Deste modo, desenvolveu-a de forma a obter uma expressão familiar para posteriormente poder recorrer ao *Algebra Tiles*. Depois de procederem à realização do esquema, o grupo percebeu então que a expressão que tinham obtido é igual a $(x+5)(x+1)$.

Por outro lado, o grupo G_{IV} observou que parte da expressão apresentada, ou seja, $(x+3)^2$ era facilmente desenvolvida usando o *Algebra Tiles*. Contudo, a expressão apresentada era $(x+3)^2 - 4$, o que levou o grupo a acrescentar ao esquema obtido anteriormente quatro quadrados pequenos vermelhos, que representam o -4 da expressão. Por observação da resolução, podemos constatar que o grupo facilmente percebeu que esses quatro quadrados pequenos vermelhos se anulavam com quatro dos quadrados pequenos verdes. Desta forma, o grupo reajustou o esquema com as peças que sobraram, ou seja, com um quadrado verde grande, seis retângulos verdes e cinco quadrados pequenos verdes. Com o esquema obtido os alunos perceberam que a expressão inicial é então igual a $(x+5)(x+1)$. Facilmente verificamos que a resolução apresentada pelo grupo G_{IV} apenas envolve o *Algebra Tiles*, o que não se verifica com os restantes grupos, donde é de salientar que a forma como este grupo utilizou o *Algebra Tiles* vai para além do que foi ensinado.

Apesar de não ter sido solicitado aos alunos o uso do *Algebra Tiles*, todos os grupos, de uma forma mais ou menos elaborada, sentiram a necessidade de recorrer a este material, o que destaca a influência deste material na resolução desta tarefa.

A tarefa que irei analisar agora diz respeito à alínea b) da tarefa 10 da terceira aula.

Na figura encontra-se representado um retângulo, ao qual foi retirado um quadrado. Para representar a área A, em centímetros quadrados, da parte colorida da figura, o Luís escreveu: $A = (x+2)(x-2)-(x-3)^2$.



b) Mostra, aplicando os casos notáveis da multiplicação, que $A = 6x - 13$.

Com esta alínea pretendia-se que os alunos aplicassem os casos notáveis. Contudo nem todos os alunos os aplicaram, tal como se observa na tabela seguinte, onde se referem as estratégias usadas pelos alunos na sua resolução.

Tabela 4 – Estratégias usadas pelos alunos na resolução da tarefa $(n = 19)$

Estratégias	**% de alunos**
Aplica a diferença de quadrados.	52,6
Aplica o quadrado do binómio.	47,4
Aplica a propriedade distributiva.	52,6
Recorre ao *Algebra Tiles*.	5,3

Por observação da tabela verifica-se que a cerca de metade dos alunos aplicou a diferença de quadrados, a propriedade distributiva ou o quadrado do binómio. Talvez o facto de mais alunos terem recorrido à diferença de quadrados do que ao quadrado do binómio se explique por ter sido introduzido nesta aula esse caso notável, enquanto o quadrado do binómio foi introduzido na primeira aula. É ainda importante referir que nem todos os alunos que aplicaram a propriedade distributiva o fizeram nos dois casos notáveis, ou seja, alguns alunos aplicaram a propriedade distributiva apenas num deles. Podemos verificar este facto na resolução apresentada pelo aluno A_1.

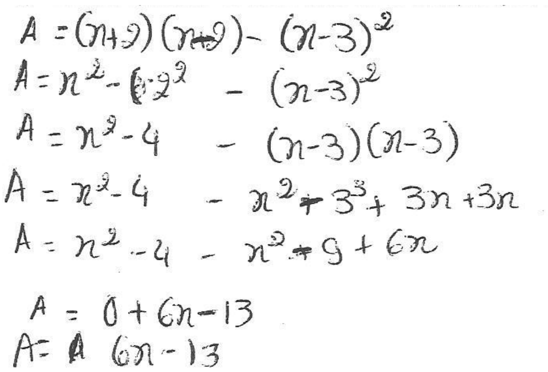


Figura 8. Resposta dada pelo aluno A_1.

Verifica-se que este aluno, tal como foi referido anteriormente, aplica a diferença de quadrados, mas no que diz respeito ao quadrado do binómio não o aplica, optando, então, por recorrer à propriedade distributiva.

É de salientar ainda a resolução do aluno A_8, que foi o único a recorrer ao *Algebra Tiles*. Vejamos então a sua resolução.

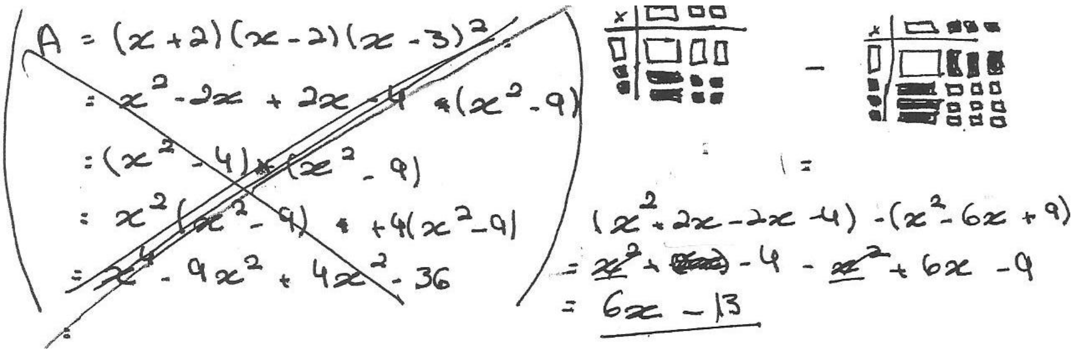


Figura 9. Resposta dada pelo aluno A_8.

Como podemos verificar, o aluno começou por resolver esta tarefa analiticamente. No entanto, para além de ter passado erradamente a expressão da área, cometeu um erro na aplicação do quadrado do binómio, erro este que é frequente nos alunos. Como a estratégia inicial utilizada pelo aluno não lhe permitiu concluir o pretendido, ele optou por recorrer a uma nova estratégia, utilizando o *Algebra Tiles*. É visível a facilidade que o aluno tem na manipulação deste material, sendo perspicaz em transpor a expressão apresentada em esquemas usando o *Algebra Tiles*. Depois de ter obtido os esquemas rapidamente, escreveu as expressões que traduzem cada um, concluindo assim o que era pedido.

Podemos constatar que este aluno não cometeu qualquer erro na utilização do *Algebra Tiles*, facto que não aconteceu na resolução analítica, o que destaca o potencial que este material teve na resolução desta tarefa.

3.2. Equações do 2º grau

3.2.1. Equações do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$

Nesta subsecção é analisada parte da tarefa 11 da quarta aula. Esta tarefa tinha como objetivo que os alunos determinassem as soluções das equações $x^2 = 1$ e $x^2 = -1$ a partir da representação gráfica da equação $y = x^2$. Para tal, na resolução desta tarefa, os alunos tiveram à sua disposição o *GeoGebra*. Começo, então, por analisar a alínea c) desta tarefa.

> Considera a equação $y = x^2$.
>
> **c)** Observando o gráfico obtido, indica a abcissa do ponto de ordenada nula. Essa abcissa corresponde à solução de que equação?

Relativamente a esta questão, os alunos, facilmente, conseguiram concluir que essa abcissa é o zero, tal como se verifica no seguinte diálogo:

> *Professora*: Pede aí para indicar a abcissa do ponto de ordenada nula. Mas o que é a abcissa?
> *Turma*: É o x.
> *Professora*: E a ordenada?
> *Turma*: É o y.
> *Professora*: Sabemos que a ordenada é nula. Então o que é que nós sabemos?
> A_5: Que o y é zero.
> *Professora*: Então que par ordenado obtemos?
> A_5: $(x, 0)$.
> *Professora*: O que é que queremos saber então?
> A_5: O x.
> *Professora*: E observando o gráfico quanto é o x?
> *Turma*: É zero.

Também não levantou dúvidas aos alunos identificar a equação que tem como solução a abcissa encontrada, a partir da representação gráfica obtida no *GeoGebra*. Vejamos então, como exemplo, a resposta apresentada pelo grupo G_{III}.

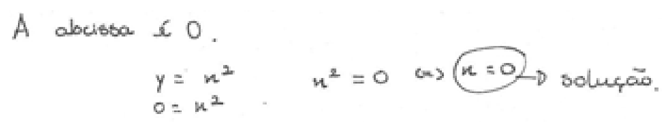


Figura 10. Resposta apresentada pelo grupo G_{III}.

Note-se que o grupo facilmente obteve a solução da equação $x^2 = 0$.

Vejamos agora a alínea e) desta tarefa, que se refere à resolução de uma equação do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0, c < 0$.

e) Determina os valores de x para os quais $x^2 - 1 = 0$.

Para encontrar as soluções da equação apresentada todos os alunos pensaram em quais os números cuja a diferença entre o seu quadrado e um dá zero. Podemos observar este pensamento através do diálogo havido no grupo G_{IV}.

A_3: Determina os valores de x para os quais $x^2 - 1 = 0$.
A_6: Pode ser o 1 e o -1.
A_3: Exato. Porque 1 elevado a 2 dá 1 e 1 menos 1 é zero.
A_6: Mas também pode ser o -1.

Pela análise do diálogo observamos que os alunos facilmente repararam que ao substituírem o x por 1 ou por -1 obtêm uma proposição verdadeira.

Como se pretendia que os alunos aprendessem a resolver analiticamente este tipo de equações, estes foram questionados sobre a existência de outro método de resolução para além daquele que tinha sido utilizado por eles. Observou-se, então, o seguinte diálogo no grupo-turma.

Professora: Como é que podemos resolver a equação $x^2 - 1 = 0$?
A_8: Pomos os termos com incógnita de um lado e os outros do outro lado.
Professora: Então fica $x^2 = 1$. Mas, e agora como continuamos?

Para relembrar os alunos como desfazer o quadrado, recorri à área de um quadrado. Para esse efeito, desenhei no quadro um quadrado de área a, como se refere no diálogo seguinte:

Professora: Como é que vocês determinam o valor do lado deste quadrado?
A_6: Pela raiz quadrada.
Professora: Como? Ora digam, a área de um quadrado é igual a quê?
A_6: Lado vezes lado.
Professora: Então fica igual a...
Turma: l^2.
Professora: Mas sabemos que a área é a. Como fica então?

A_6 : $a = l^2$.
Professora: E como tiramos o valor do lado?
Turma: Raiz quadrada de a.

Depois de os alunos relembrarem que a raiz desfaz o quadrado, aplicou-se este método de resolução na equação em questão, ou seja, na equação $x^2 = 1$. Facilmente os alunos conseguiram transpor o que foi visto para determinar o lado do quadrado para esta equação, isto é, facilmente os alunos conseguiram concluir que $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1}$. Contudo, como já não se trata de áreas, mas sim da resolução analítica de uma equação, os alunos perceberam que também tinham a solução negativa obtendo, deste modo, $x = \pm\sqrt{1}$. Ao longo da discussão no grupo-turma fui alertando para a notação que se usa na resolução deste tipo de equações, ou seja, que $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$.

Será agora analisada a alínea g), ainda da tarefa 11, com o objetivo de exemplificar a resolução das equações do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ e $c > 0$.

g) Determina os valores de x para os quais $x^2 + 1 = 0$.

Na resolução desta alínea todos alunos conseguiram concluir que não existe nenhum valor de x que satisfaz a equação $x^2 + 1 = 0$. Vejamos, então, o diálogo havido no grupo-turma:

Professora: Vamos ver a alínea g). Então como é que fazemos?
Turma: Não é possível.
Professora: Porque não é possível?
A_{17} : Porque para qualquer número positivo ou negativo, como o expoente é par, vai dar sempre positivo e como ainda se soma um nunca vai dar zero.
Professora: Toda a gente percebeu? O A_{17} está a dizer que como o expoente é par o x^2 vai dar sempre um número?
Turma: Positivo.
Professora: E alguma vez $x^2 + 1$ vai dar zero?
A_{20} : Não. Porque ainda se soma 1 ao x^2.
Professora: Mas agora vamos resolver esta equação como resolvemos a da alínea e). Como é que fica? $x^2 + 1 = 0$ é equivalente a...
Turma: $x^2 = -1$.
Professora: Quais são as soluções de $x^2 + 1 = 0$?
A_9 : Não tem.
Professora: E a equação $x^2 = -1$ em relação à equação $x^2 + 1 = 0$, o que é?
A_{13} : É equivalente.
Professora: Então quais são as soluções da equação $x^2 = -1$?
A_{13} : São as mesmas da equação $x^2 + 1 = 0$.

Turma: Não tem.
Professora: Então esta é uma equação?
Turma: Impossível.

Por observação do diálogo observa-se que os alunos concluíram facilmente que a equação $x^2+1=0$ é equivalente à equação $x^2=-1$, ou seja, que estas duas equações têm o mesmo conjunto solução, tal como foi referido pelo aluno A_{13}. Deste modo, rapidamente a turma concluiu que a equação $x^2=-1$ é uma equação impossível.

3.2.2. Equações do tipo $ax^2+bx=0$, com a e $b\neq 0$

Para o estudo das equações deste tipo é analisada a tarefa 13 da quarta aula. Para a resolução desta tarefa, os alunos tiveram que utilizar o *GeoGebra* e o *Algebra Tiles*. No que diz respeito ao *GeoGebra*, os alunos tiveram à sua disposição uma construção (Anexo V) que lhes permitiu variar cada um dos parâmetros a, b e c de uma equação do segundo grau. Comecemos por apresentar a alínea a).

a) Completa a tabela que se segue. Recorre ao *GeoGebra* para determinares o número de soluções e as soluções de cada uma das equações que te são apresentadas e recorre ao *Algebra Tiles* para obteres a factorização dos polinómios.

Equação	Nº de soluções	Soluções	Fatorização
$x^2+2x=0$			×
$x^2-2x=0$			×
$x^2+3x=0$			×
$x^2-3x=0$			×

Com esta alínea pretendia-se que, a partir da construção feita no *GeoGebra*, os alunos determinassem as soluções e o número de soluções das equações apresentadas. Seguidamente, com o *Algebra Tiles*, os alunos poderiam obter uma fatorização dos seus primeiros membros. Desta forma, os alunos seriam encaminhados para a resolução analítica destas equações.

Na realização desta alínea os alunos apresentaram dificuldades em preencher a tabela no que diz respeito à coluna do número de soluções e das soluções das equações apresentadas. Como pude constatar, quando circulava pelos grupos, esta dúvida era geral. Em consequência, achei pertinente fazer uma discussão com o grupo-turma para ultrapassar esta dúvida. Observou-se, assim, o seguinte diálogo:

> *Professora*: A primeira equação que nos aparece aí é $x^2+2x=0$. Então o que temos que pôr no *GeoGebra*?
> A_{17}: $a=1$, $b=2$ e $c=0$.
> *Professora*: Isso! Temos então a equação $y=x^2+2x$. Agora pede o número de soluções e as soluções, como é que vamos ver isso? O que são as soluções?
> A_3: São os valores de x.
> *Professora*: Muito bem! Então estamos à procura dos valores de x. E neste caso, então, quantas soluções tem?
> *Turma*: Duas.
> A_9: O –2 e o 0.
> *Professora*: Explica lá A_9. Nós queremos as soluções de $x^2+2x=0$, o que representa o zero?
> A_9: O valor de y.
> *Professora*: Então queremos os valores de x quando...
> *Turma*: Quando o y é zero.
> *Professora*: Então vamos olhar para o gráfico. Quando o y é zero quais são as soluções?
> *Turma*: 0 e –2.
> *Professora*: Isso! Então já conseguem completar a tabela.

Considero que os alunos estavam com dificuldades em interpretar os dados que obtinham no *GeoGebra*, ou seja, não estavam a conseguir compreender que tinham de encontrar os valores de x quando o y é zero. No entanto, com esta discussão, penso que os alunos perceberam quantas e quais as soluções da equação $x^2+2x=0$. Depois de ser explorado no grupo-turma o número de soluções e as soluções da primeira equação apresentada, os alunos facilmente conseguiram fazer o mesmo para as restantes equações.

Para preencherem a última coluna da tabela os alunos tiveram que fazer a fatorização do primeiro membro das equações apresentadas, recorrendo ao *Algebra Tiles*. É importante referir que os alunos não tiveram qualquer dificuldade em preencher esta coluna, uma vez que para estes alunos a manipulação com o *Algebra Tiles* já era bastante familiar. Posteriormente questionou-se os alunos sobre como poderiam obter estas fatorizações sem necessitarem de recorrer ao *Algebra Tiles*. Vejamos, então, o diálogo ocorrido no grupo-turma.

> *Professora*: Como é que será que podemos obter esta fatorização sem recorrer ao *Algebra Tiles*? x^2+2x é igual a quê?
> *Turma*: $x \times x + 2 \times x$.
> *Professora*: Então como é que de $x \times x + 2 \times x$ obtemos $x(x+2)$?
> A_6: Pela propriedade distributiva.
> *Professora*: Explica lá então A_6.
> A_6: Porque temos fatores iguais.
> *Professora*: Muito bem! E que fatores são esses?
> *Turma*: O x.
> *Professora*: Então o que fazemos?
> A_8: Pomos em evidência.
> *Professora*: Isso mesmo! Mas o que pomos em evidência?
> *Turma*: O x.
> *Professora*: Muito bem! Pomos o x em evidência porque é o que está em comum. Então como fica?
> *Turma*: $x(x+2)$.
> *Professora*: Pronto, então vocês conseguiram obter esta fatorização com o *Algebra Tiles*, mas analiticamente temos que ver os fatores que estão em comum para depois pôr em evidência, certo? Toda a gente percebeu?
> *Turma*: Sim.

Pelo diálogo podemos afirmar que foi fácil para os alunos perceber como podem fatorizar uma expressão sem recorrerem ao *Algebra Tiles*. Repare-se que o aluno A_6 foi perspicaz ao referir que se obtinha $x(x+2)$ aplicando-se a propriedade distributiva da multiplicação e, desta forma, o facto de existirem fatores comuns e de se ter que pôr em evidência esses mesmos fatores surgiu naturalmente para os alunos.

Seguidamente é analisada a alínea c) da tarefa 13.

c) Recorrendo à fatorização obtida com o *Algebra Tiles*, resolve analiticamente cada uma das equações apresentadas na tabela.

Com esta alínea pretendia-se que os alunos resolvessem analiticamente as equações apresentadas na alínea a) partindo das fatorizações obtidas com o *Algebra Tiles*. Para a resolução analítica deste tipo de equações é necessário aplicar-se a lei do anulamento do produto. Assim, questionei os alunos sobre como resolver analiticamente a equação $x^2+2x=0$, com o intuito de os encaminhar para a aplicação da lei do anulamento do produto, como se mostra no seguinte diálogo:

Professora: Como é que podemos resolver analiticamente a equação $x^2 + 2x = 0$?
Aí diz para utilizarem a factorização obtida com o *Algebra Tiles*. Com o *Algebra Tiles* não obtivemos outra maneira de escrever $x^2 + 2x$?
Turma: Sim.
Professora: Então o que podemos escrever?
A_{13}: $x(x+2)$.
Professora: Então $x^2 + 2x = 0$ vai ser equivalente a quê?
A_5: A $x(x+2) = 0$. Agora fazemos a conta.

O aluno A_5 quando diz "Agora fazemos a conta", referia-se à aplicação da propriedade distributiva, sem se aperceber que nesse caso se obtém o mesmo que tinha anteriormente, e continuando sem conseguir resolver a equação. Contudo, considerei normal esta reação pois a lei do anulamento do produto ainda era desconhecido dos alunos. Continuemos, então, a observar o diálogo:

Professora: Olhando para a equação $x(x+2) = 0$ como é que será que a podemos resolver? Nós temos aqui um produto de dois polinómios não é? E esse produto tem que dar zero. Quando é que isso acontece?
A_9: $-1+1$.
Professora: Mas isso não é um produto. Por exemplo, quando é que o produto de dois números é zero?
(...)
A_8: Quando se multiplica por zero.
Professora: Isso! Então quando é que o produto destes dois polinómios vai ser zero?
A_{13}: Quando o x for zero.
Professora: Só o x?
(...)
Professora: Neste caso estamos a multiplicar o x, que é um fator, por $x+2$, que é outro fator.
A_5: Se um deles se for zero, já está.
Professora: Então dizemos que basta que um dos fatores seja zero. Quais são os fatores desta multiplicação?
Turma: O x e o $x+2$.
Professora: Pronto, então como basta que um deles seja zero, fica $x = 0$ ou...
A_{13}: $x + 2 = 0$.
Professora: O que escrevemos é $x = 0 \vee x + 2 = 0$. O símbolo $\vee$ lê-se ou. Então e agora como resolvemos a equação $x + 2 = 0$?
A_5: Fica $x = -2$.
Professora: Então quais são as soluções da equação $x^2 + 2x = 0$?
Turma: 0 e –2.

Pela análise da discussão verifica-se que no início os alunos estavam com um pouco de dificuldades em perceber quando é que o produto $x(x+2)$ daria zero. Recorri então a exemplos com números, exemplificando produtos com números em que um deles era zero. Partindo destes exemplos, foi mais fácil para os alunos compreenderem que um dos fatores teria que ser zero. No final deste diálogo havido no grupo-turma, alertei os alunos que quando de $x(x+2)=0$ obtemos $x=0 \vee x+2=0$, estamos a aplicar a lei do anulamento do produto.

Considero que o *Algebra Tiles* é um material que funciona muito bem no que diz respeito à fatorização, donde tratar-se de um material que pode ser útil para os alunos que não consigam fatorizar analiticamente uma expressão. Nesta situação, o *GeoGebra* funcionou mais como um meio de confirmação, dado que numa primeira fase os alunos tiveram que descobrir as soluções das equações apresentadas e depois de as resolverem analiticamente poderiam confirmar os resultados obtidos com os obtidos no *GeoGebra*.

3.2.3. Equações do tipo $ax^2+bx+c=0$, com a,b e $c \neq 0$

Para o estudo das equações deste tipo foi proposta uma tarefa semelhante à tarefa 13, analisada anteriormente. Referimo-nos à tarefa 14, da quinta aula, de que passamos a analisar a primeira alínea.

a) Completa a tabela que se segue. Recorre ao *GeoGebra* para determinares o número de soluções e as soluções de cada uma das equações que te são apresentadas e recorre ao *Algebra Tiles* para obteres a factorização dos polinómios.

Equação	Nº de soluções	Soluções	Fatorização
$x^2+4x+3=0$			
$x^2+8x+16=0$			
$x^2-x-6=0$			

Para a resolução desta alínea, dado que esta tarefa é semelhante à tarefa 13, os alunos já não apresentaram tantas dificuldades na sua resolução, uma vez que estas já tinham sido ultrapassadas anteriormente. Conseguiram facilmente manipular a construção feita no *GeoGebra* e determinar o número de soluções e as soluções de cada equação. A única dificuldade que surgiu foi na fatorização do 1º membro da equação $x^2 - x - 6 = 0$. Para que os alunos ultrapassassem esta dificuldade foi necessária a minha intervenção. No entanto, como o meu objetivo era que fossem os alunos a obterem a fatorização, fui apenas dando dicas. Alertei os alunos para pensarem nos possíveis esquemas que podiam obter e qual seria o correto. Para pensarem nestes esquemas, os alunos tinham que dispor os quadrados pequenos e só depois acertar com os retângulos para, assim, obter o esquema correto. Os alunos foram, então, tentando obter o esquema, não revelando quaisquer dificuldades em dispor os quadrados pequenos, mas apresentando dúvidas no que diz respeito à disposição dos retângulos. Os alunos começaram por obter dois esquemas como os que se apresentam nas figuras seguintes:

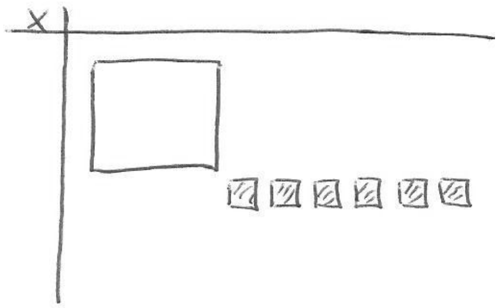


Figura 11. Um dos esquemas obtidos pelo grupo-turma.

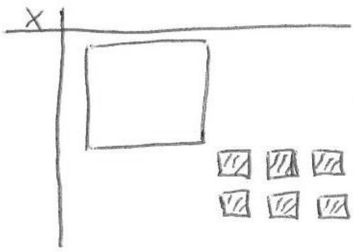


Figura 12. Outro esquema obtido pelo grupo-turma.

Com o primeiro esquema, os alunos concluíram que ele ou não respeitava o funcionamento do *Algebra Tiles*, pois os retângulos que estão do mesmo lado do esquema têm que ser todos da mesma cor, ou não estava de acordo com o 1º membro da equação. Desta forma, os alunos partiram para o segundo esquema apresentado e facilmente conseguiram dispor os retângulos, obtendo, assim, um esquema correto.

Também nesta tarefa, concretamente na alínea b), foi pedido aos alunos que resolvessem analiticamente as equações apresentadas.

b) Resolve analiticamente cada uma das equações apresentadas na tabela.

Para a resolução desta alínea os alunos não apresentaram grandes dificuldades. O que se pretendia era que, tal como na tarefa 13, os alunos a partir das fatorizações obtidas com o *Algebra Tiles* concluíssem, por exemplo, que $x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1)=0$. Conforme circulava pelos grupos, pude constatar que tal facto aconteceu e verifiquei ainda que os alunos, de seguida, aplicaram corretamente a lei do anulamento do produto e obtiveram as soluções corretas das equações.

3.3. Ficha de avaliação por partes

Nesta subsecção é analisada a ficha de avaliação por partes, constituída por cinco questões sobre os tópicos por mim lecionados. Na realização desta ficha de avaliação os alunos tiveram à sua disposição o *GeoGebra* para utilizarem quando considerassem necessário. Na tabela seguinte apresentam-se os objetivos de cada questão desta ficha de avaliação por partes.

Tabela 5 – Objetivos das questões da ficha de avaliação por partes

Questão	Objetivos
1	– Manipular de expressões.
2	– Traduzir o problema apresentado em linguagem corrente por meio de uma equação do 2º grau. – Resolver uma equação do tipo $x^2-c=0$.
3	– Traduzir o problema apresentado em linguagem corrente. – Resolver uma equação do tipo $x^2+bx=0, \quad b\neq 0$.
4	– Resolver equações do 2º grau.
5	– Formular equações do tipo $x^2-a=0$ de acordo com o número de soluções.

De seguida apresento a primeira questão da ficha de avaliação por partes.

Questão 1

Sobre dois números a e b sabe-se que:

- $a-b=9$;
- $ab=36$.

Sem determinares os valores de a e b, calcula o valor das seguintes expressões:

a) $2ab$; **b)** $2a-2b$; **c)** $a^2-2ab+b^2$.

Com esta questão pretendia-se que os alunos determinassem valores para certas expressões. Para isso, era necessário que estes manipulassem as expressões dadas de modo a poderem utilizar o que lhes era fornecido no enunciado para, assim, concluírem corretamente o valor das expressões. Na tabela 6 são apresentadas as respostas dos alunos nesta questão.

Tabela 6 – Respostas obtidas na questão 1 ($n = 19$)

Respostas	**% de alunos**		
	a)	**b)**	**c)**
Corretas	63,1	26,3	15,8
Parcialmente corretas	15,8	26,3	10,5
Incorretas	21,1	47,4	63,2
Não responde	–	–	10,5

Como se pode verificar pela tabela, a maior parte dos alunos respondeu corretamente à primeira alínea desta questão. Relativamente à alínea b) obteve-se tantas respostas corretas como parcialmente corretas, sendo que grande parte dos alunos apresentou uma resposta incorreta. Alguns destes alunos atribuíram valores incorretos para a e para b, pois não verificavam as condições dadas no enunciado. É de salientar a resposta do aluno A_7, que confunde expressões algébricas com equações, como podemos verificar na figura 13.

b) $2a-2b \Leftrightarrow \frac{2a}{2} - \frac{2b}{2} \Leftrightarrow a - b \Leftrightarrow 9$

Figura 13. Resposta apresentada pelo aluno A_7.

Verifica-se que os alunos sentiram maior dificuldade na resolução da alínea c). Nesta alínea era importante que os alunos tivessem presente a fórmula do quadrado do binómio, pois esta era a única forma de responder à alínea em questão. Os alunos que não foram capazes de perceber que a expressão apresentada diz respeito ao desenvolvimento do quadrado da diferença apenas e substituíram o valor de $2ab$, calculado na alínea a), como mostra a figura seguinte.

c) $a^2-2ab+b^2 = a^2 - 72 + b^2$

Figura 14. Resposta apresentada pelo aluno A_5.

Devo referir que os alunos que na alínea b) atribuíram um valor para cada uma das incógnitas apresentadas voltaram a considerar esses mesmos valores nesta alínea não apresentando, deste modo, o valor correto da expressão.

Nas respostas consideradas como parcialmente corretas os alunos foram capazes de identificar $a^2 - 2ab + b^2$ como sendo $(a-b)^2$, mas não encontraram o valor da expressão pois não substituíram $a-b$ por 9.

Para avaliar a capacidade dos alunos na resolução de problemas que envolvem equações do 2º grau, foi proposta a seguinte questão:

Questão 2

Numa sala de aula está afixado um quadro cuja altura é metade da largura.

a) Representa por x a largura do quadro e escreve uma expressão algébrica que represente a área do quadro.

b) Sabe-se que a área do quadro é de 392 dm^2. Determina as suas dimensões.

Na tabela seguinte são apresentadas as respostas dos alunos nesta questão.

Tabela 7 – Respostas obtidas na questão 2 ($n = 19$)

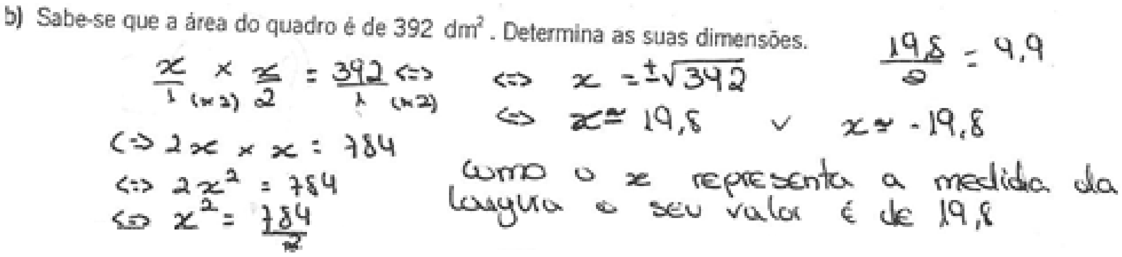
Respostas	**% de alunos**	
	a)	**b)**
Corretas	68,4	26,3
Parcialmente corretas	15,8	36,8
Incorretas	10,5	21,1
Não responde	5,3	15,8

Por observação da tabela, a maior parte dos alunos respondeu corretamente à alínea a). Relativamente aos alunos que não conseguiram determinar a expressão para a área pedida, salienta-se a resposta do aluno A_{18} que considerou a altura como sendo o dobro da largura e não como sendo metade.

A alínea b) desta questão tinha como objetivo que os alunos resolvessem uma equação do 2º grau do tipo $x^2 - c = 0$. Para tal, os alunos tinham que começar por interpretar a informação dada de modo a obter uma equação desse tipo, pois tinham de igualar a expressão obtida na alínea a) ao valor que era dado para a área do quadro.

Verifica-se, pela tabela, que alguns alunos obtiveram uma resposta parcialmente correta para a alínea b). Analisando as respostas dos alunos verificou-se que grande parte dos alunos

(47,4%) apresentou corretamente a equação que traduz a situação apresentada. Destes alunos, apenas 33,3% encontraram o valor correto para x. Os que não obtiveram o valor correto de x cometeram o erro de eliminação incorreta de denominadores num dos passos da resolução da equação, como se mostra na figura 15.


b) Sabe-se que a área do quadro é de 392 dm^2. Determina as suas dimensões.

$\frac{x}{1}_{(\times 2)} \times \frac{x}{2} = \frac{392}{1}_{(\times 2)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x \times x = 784$
$\Leftrightarrow 2x^2 = 784$
$\Leftrightarrow x^2 = \frac{784}{2}$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{392}$
$\Leftrightarrow x \simeq 19,8 \quad \vee \quad x \simeq -19,8$

$\frac{19,8}{2} = 9,9$

como o x representa a medida da largura o seu valor é de 19,8

Figura 15. Resposta apresentada pelo aluno A_8.

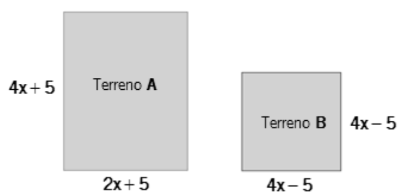
Por observação da resposta, verificamos que o aluno começou por reduzir ambos os membros da equação ao mesmo denominador em vez de antes efetuar a multiplicação dos termos que constituem o primeiro membro.

Mais uma vez, para testar a capacidade dos alunos na resolução de equações do 2º grau, nomeadamente do tipo $x^2 + bx = 0$, foi proposta a questão 3. Esta questão consiste num problema em que, para a sua resolução, os alunos teriam que interpretar devidamente o seu enunciado.

Questão 3

O Senhor José deu um terreno a cada um dos seus dois filhos. Deu o terreno **A** ao João e o terreno **B** à Joana.

Atendendo às medidas assinaladas na figura seguinte, determina o valor de x de modo a que os dois irmãos fiquem com terrenos de igual área.



Com esta tarefa pretendia-se que os alunos concluíssem que para a sua resolução era necessário igualar as expressões das áreas de cada um dos terrenos. Na tabela seguinte podem observar-se as respostas apresentadas pelos alunos nesta questão.

Tabela 8 – Tipo de respostas apresentadas pelos alunos na questão 3 ($n = 19$)

Tipo de respostas	% de alunos
Determina corretamente as expressões da área de cada um dos terrenos, iguala a duas expressões, resolve corretamente a equação e apresenta a solução correta para o problema.	10,5
Determina corretamente as expressões da área de cada um dos terrenos, iguala as duas expressões, resolve corretamente a equação, mas não apresenta a solução correta do problema.	5,3
Determina corretamente as expressões da área de cada um dos terrenos, iguala as duas expressões, mas não resolve corretamente a equação, não obtendo a resposta correta para o problema.	15,8
Apenas determina corretamente as expressões da área de cada um dos terrenos.	36,8
Determina apenas a expressão correta da área de um dos terrenos.	5,3
Determina a expressão correta da área de cada um dos terrenos, iguala cada uma das expressões a zero e determina um valor de x para cada uma das equações.	10,5
Apresenta uma resposta totalmente errada.	5,3
Não responde.	10,5

Pela análise da tabela verifica-se que grande parte dos alunos não conseguiu concluir a resolução desta questão, pois apenas determinaram corretamente as expressões da área de cada um dos terrenos. Dos alunos que igualaram as expressões das áreas de cada um dos terrenos, três alunos não resolveram corretamente a equação obtida, tal como exemplifico na figura seguinte:

$$(4x+5)(2x+5)=(4x-5)^2$$
$$8x^2+20x+10x+25=4x^2-40x+25$$
$$8x^2+30x+25-4x^2+40x-25=0$$
$$8x^2-4x^2+30x+40x+25-25=0$$
$$4x^2+70x=0$$
$$x(4x+70)=0$$
$$x=0 \lor 4x+70=0$$
$$x=0 \lor x=\frac{-70}{4}$$
$$x=0 \lor x=-17{,}5$$

R: é impossível os 2 irmãos terem a mesma área de terreno

Figura 16. Resposta apresentada pelo aluno A_{18}.

Facilmente verificamos que o aluno cometeu um erro no desenvolvimento do quadro do binómio, pois em vez de considerar $(4x)^2$ considerou $4x^2$. Este erro fez com que o aluno obtivesse soluções que não fazem sentido no contexto do problema.

Para avaliar a compreensão dos alunos nos processos de resolução dos diferentes tipos de equações do 2º grau e para verificar se os alunos recorriam ao *Algebra Tiles* de uma forma correta ou incorreta para procederem à resolução destas equações, foi proposta a seguinte questão:

4. Resolve cada uma das seguintes equações:

a) $x^2 + 9 = 0$;

b) $3x\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) = -4x$;

c) $4x^2 - 8x + 4 = 0$;

d) $(x-3)^2 - 1 = 0$.

Na tabela 9 apresentam-se as percentagens de alunos segundo as respostas corretas, parcialmente corretas e erradas.

Tabela 9 – Respostas obtidas na questão 4 ($n = 19$)

Respostas	**% de alunos**			
	a)	**b)**	**c)**	**d)**
Corretas	42,1	26,3	57,8	47,4
Parcialmente corretas	5,3	68,4	31,6	36,8
Erradas	52,6	5,3	5,3	10,5
Não responde	–	–	5,3	5,3

Pela tabela observa-se que a maior parte dos alunos apresentaram uma resposta errada para a alínea a) desta questão. Alguns destes alunos consideraram que $\sqrt{-9}$ é igual a $\sqrt{9}$, obtendo deste modo 3 e –3 como soluções da equação apresentada. Os restantes alunos que também resolveram erradamente esta alínea cometeram um dos erros mais comuns na resolução de equações, o erro de transposição, tal como se verifica na figura seguinte:

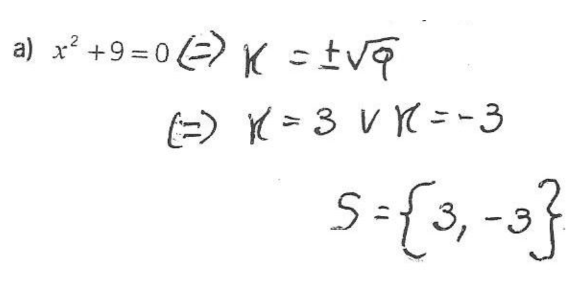


Figura 17. Resolução apresentada pelo aluno A_{10}.

Facilmente se constata que o aluno começou por mudar o termo independente de membro, mas não lhe troca o sinal quando o muda de membro, mantendo assim o termo independente com o mesmo sinal.

Repare-se que grande parte dos alunos resolveu corretamente a equação e a resolução apresentada por um aluno foi considerada parcialmente correta porque este, apesar de não cometer os erros anteriormente descritos, não conclui que a equação é impossível.

Na alínea b) a maior parte dos alunos apresentou resoluções consideradas parcialmente corretas porque cometeram alguns erros, tal como se mostra na tabela 10.

Tabela 10 – Erros identificados nas resoluções dos alunos na alínea b) $(n=13)$

Erros	Exemplos	% de alunos
Eliminação de parênteses	$3x\left(\frac{x}{2}-1\right)=-4x \Leftrightarrow \frac{3x}{2}-3x=-4x$	15,4
Eliminação incorreta de denominadores	$3x\left(\frac{x}{2}-1\right)=-4x \Leftrightarrow 3x(x-2)=-4x$	46,2
Adição incorreta de termos semelhantes	$3x\left(\frac{x}{2}-1\right)=-4x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=0 \vee 3x-6+8=0$ $\Leftrightarrow x=0 \vee 3x-2=0$	7,7
Transposição	$3x\left(\frac{x}{2}-1\right)=-4x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=0 \vee 3x+2=0$ $\Leftrightarrow x=0 \vee 3x=2$	15,4

O erro mais frequente foi a eliminação incorreta de denominadores. Neste caso, talvez não fossem cometidos tantos erros se os alunos tivessem começado por desembaraçar de parênteses. Todavia, tal não se verificou, tendo os alunos optado por reduzir ao mesmo denominador o que se encontrava dentro de parênteses, levando-os a cometer o erro de eliminar os denominadores.

No que diz respeito à alínea c), a maior parte dos alunos apresentou uma resposta correta. É de salientar que apenas um aluno não recorreu ao *Algebra Tiles* na resolução desta alínea. Este aluno optou por completar o quadrado, recorrendo ao reciproco do desenvolvimentos do quadrado do binómio, obtendo corretamente a equação $(x-1)^2=0$.

Na alínea d) grande parte dos alunos resolveu corretamente a equação apresentada recorrendo ao *Algebra Tiles*. Note-se que os alunos poderiam ter aplicado a diferença de quadrados, não sendo assim necessário recorrer ao *Algebra Tiles,* pois obtinham logo o primeiro membro da equação fatorizado. Na tabela 11 sintetiza-se a forma como os alunos recorreram ao *Algebra Tiles* nesta alínea e na anterior.

Tabela 11 – Forma como os alunos recorrem ao *Algebra Tiles* ($n = 19$)

Questão	% de alunos que recorre ao *Algebra Tiles*		% de alunos que não recorre ao *Algebra Tiles*
	Forma correta	Forma incorreta	
4 c)	68,4	21,1	10,5
4 d)	52,6	15,8	31,6

Por observação da tabela verificamos que, tanto na alínea c) como na alínea d), a maior parte dos alunos recorreu de forma correta ao *Algebra Tiles*. É de salientar a resposta apresentada pelo aluno A_6, que recorreu ao *Algebra Tiles* de uma forma correta e diferente dos restantes alunos que também recorreram a este material.

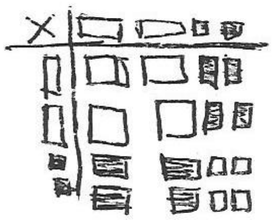


Figura 18. Resolução apresentada pelo aluno A_6.

Ao contrário do que seria de esperar, o aluno não simplificou a equação apresentada de modo a obter uma equação equivalente, mas com coeficiente do termo em x^2 igual a 1, o que tornaria mais fácil a utilização do *Algebra Tiles*. No entanto, o aluno foi perspicaz na manipulação do material, tendo sido capaz de apresentar um esquema não muito trabalhado nas aulas.

Por outro lado, alguns dos alunos que começaram por simplificar a expressão apresentada não conseguiram obter de forma imediata o esquema que a traduz. Repare-se na seguinte figura, apresentada pelo aluno A_9:

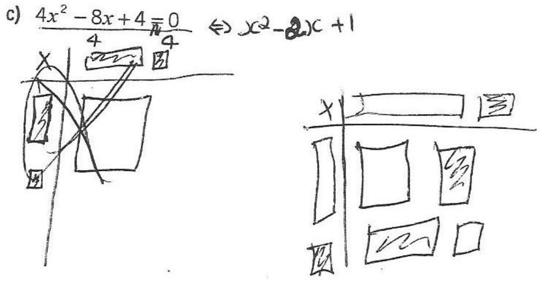


Figura 19. Resolução apresentada pelo aluno A_9.

Podemos constatar que este aluno começou por representar as partes laterais do esquema, mas reparou que ao aplicar a propriedade distributiva não obteve o desenvolvimento correto, pois iria obter $2x$ em vez de $-2x$. De seguida, certamente, começou por representar no esquema o primeiro membro da equação simplificada, obtendo facilmente a fatorização para o primeiro membro dessa equação.

O mesmo se pode verificar na seguinte resolução, do aluno A_1, apresentada na alínea d) desta questão.

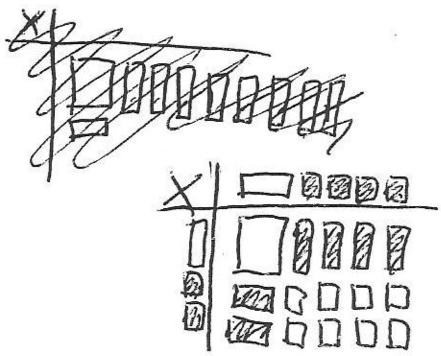


Figura 20. Resolução apresentada pelo aluno A_1.

Na resposta apresentada por este aluno observamos que ele começa por dispor os 8 quadrados pequenos verdes em linha, obtendo, assim, 9 retângulos o que não estaria de acordo com a equação. Deste modo, o aluno dispõe esses 8 quadrados de outra forma, o que lhe permitiu obter corretamente o esquema pretendido.

No que diz respeito aos alunos que, na alínea c), recorreram de forma incorreta ao *Algebra Tiles*, o erro que cometeram foi não distinguir as peças positivas das peças negativas, obtendo, assim, equações com os termos todos positivos.

Na alínea d), os alunos que recorreram de forma incorreta ao *Algebra Tiles* apresentaram esquemas que não estavam de acordo com a equação obtida, tal como exemplifico na figura 21.

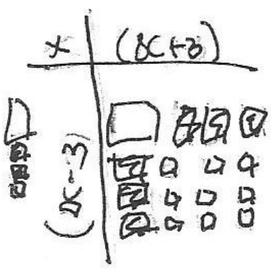


Figura 21. Resolução apresentada pelo aluno A_3.

O erro deste aluno consistiu em começar por dispor as peças que representam o termo em x em vez de começar por dispor as peças que representam o termo independente. Deste modo, obteve 9 quadrados pequenos verdes em vez de 8.

Da análise desta questão, concluímos que os alunos sempre que lhes era permitido recorreram ao *Algebra Tiles*, mostraram destreza na manipulação deste material.

Para avaliar a capacidade dos alunos em formular equações do tipo $x^2 - a = 0$ de acordo com o número de soluções possíveis para este tipo de equações foi proposta a seguinte questão:

Questão 5

Explicando como procedeste, indica um valor para **a** de modo que a equação $x^2 - \mathbf{a} = 0$ tenha exatamente:

a) Zero soluções;

b) Uma solução;

c) Duas soluções.

Observe-se na tabela seguinte as respostas dadas pelos alunos:

Tabela 12 – Respostas obtidas na questão 5 $(n = 19)$

Respostas	**% de alunos**		
	a)	**b)**	**c)**
Corretas	57,9	21,1	52,6
Parcialmente corretas	10,5	–	5,3
Erradas	26,3	73,6	31,6
Não responde	5,3	5,3	10,5

No que diz respeito à alínea a) desta questão, observamos que a maior parte dos alunos respondeu corretamente. Os alunos que responderam incorretamente a esta alínea atribuíram a a o valor zero considerando, deste modo, que a equação não admitia solução, o que não se verifica. Relativamente à alínea b) a maior parte dos alunos respondeu erradamente. Alguns destes alunos atribuíram a a valores para os quais a equação admitia duas soluções, e como era pedido uma solução, os alunos consideraram apenas uma das soluções obtidas. Outros alunos em vez de atribuírem um valor numérico a a, atribuíram um monómio. Também na alínea c) todos os alunos que responderam erradamente atribuíram um monómio ou um polinómio a a. Contudo, neste caso, é de salientar que a maior parte dos alunos respondeu corretamente. Repare-se na resposta apresentada pelo aluno A_{16}.

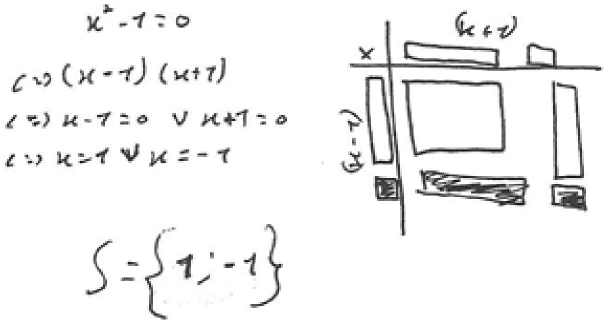


Figura 22. Resposta apresentada pelo aluno A_{16}.

Este aluno parece que não estava a conseguir resolver a equação $x^2 - 1 = 0$ utilizando os processos usuais de resolução deste tipo de equação, tendo contornado a situação recorrendo corretamente a outro processo de resolução, concretamente ao *Algebra Tiles* para encontrar uma expressão equivalente a $x^2 - 1$.

É de referir, ainda, que nas respostas consideradas parcialmente corretas nas três alíneas, os alunos indicaram um valor para a, mas não apresentaram uma justificação para a escolha desse valor.

Na tabela seguinte apresenta-se as classificações, em percentagem, dos alunos em cada uma das questões da ficha de avaliação por partes e a respetiva nota final. Note-se que o aluno A_{14} não consta na tabela apresentada, pois trata-se de um aluno com necessidades educativas especiais, tendo, assim, uma ficha de avaliação por partes adaptada de acordo com as suas necessidades. Este aluno teve a classificação final de 18%.

Tabela 13 – Classificações, em percentagem, da ficha de avaliação por partes

Questão	**1a)**	**1b)**	**1c)**	**2a)**	**2b)**	**3)**	**4a)**	**4b)**	**4c)**	**4d)**	**5a)**	**5b)**	**5c)**	**Nota Final**
Cotação	**4%**	**6%**	**9%**	**6%**	**10%**	**15%**	**8%**	**8%**	**8%**	**8%**	**6%**	**6%**	**6%**	**100%**
Aluno														
A_1	4%	5%	8%	6%	5%	6%	0%	7%	8%	8%	0%	0%	3%	60%
A_2	0%	0%	0%	0%	0%	6%	0%	7%	5%	0%	0%	0%	0%	18%
A_3	3%	0%	0%	6%	7%	7%	7%	7%	7%	6%	3%	0%	0%	53%
A_4	1%	6%	0%	0%	0%	0%	8%	3%	0%	0%	0%	0%	0%	18%
A_5	4%	6%	0%	6%	6%	14%	8%	8%	8%	8%	6%	6%	6%	90%
A_6	4%	3%	0%	6%	10%	3%	0%	3%	5%	0%	0%	6%	0%	40%
A_7	4%	0%	9%	6%	10%	11%	8%	8%	8%	8%	6%	6%	6%	90%
A_8	4%	6%	9%	6%	9%	15%	8%	8%	8%	8%	6%	0%	6%	93%
A_9	1%	0%	0%	6%	2%	0%	0%	0%	8%	4%	6%	0%	0%	27%
A_{10}	0%	3%	0%	6%	7%	0%	0%	8%	8%	8%	6%	6%	6%	58%
A_{11}	4%	1%	0%	1%	0%	3%	0%	4%	5%	5%	3%	0%	0%	86%
A_{12}	4%	0%	0%	1%	0%	6%	0%	3%	0%	3%	0%	0%	6%	23%
A_{13}	4%	0%	0%	6%	10%	15%	8%	8%	8%	3%	6%	0%	6%	74%
A_{15}	4%	0%	0%	6%	0%	8%	8%	7%	8%	8%	6%	0%	6%	61%
A_{16}	0%	0%	0%	0%	0%	6%	0%	4%	8%	8%	0%	0%	6%	32%
A_{17}	0%	0%	5%	6%	7%	6%	8%	7%	8%	2%	6%	0%	0%	55%
A_{18}	4%	3%	0%	1%	10%	14%	0%	6%	4%	8%	6%	0%	0%	56%
A_{19}	4%	6%	0%	6%	0%	6%	0%	7%	5%	7%	6%	0%	6%	53%
A_{20}	4%	6%	9%	6%	9%	14%	8%	7%	8%	8%	6%	0%	6%	91%
Média	2,8%	2,4%	2,1%	4,3%	5%	7,4%	3,7%	5,8%	6,3%	5,4%	3,8%	1,3%	3,3%	53,6%

Incluindo o aluno A_{14} , a classificação média nesta ficha de avaliação foi de 51%, com 35% de negativas e 65% de positivas. Pela análise da tabela verificamos que os alunos revelaram mais dificuldades nas questões 1c), 4a) e 5b) e obtiveram melhores resultados nas questões 1a), 4b), 4c) e 5c).

Apesar de as negativas terem sido baixas, obtiveram-se positivas bastante altas, havendo mesmo quatro excelentes. Assim, considero que de uma forma geral os resultados foram razoáveis devido a tratar-se de tópicos matemáticos onde geralmente os alunos apresentam dificuldades, pois envolve bastante manipulação algébrica.

3.4. Perceções dos alunos sobre o uso de tecnologia e materiais manipuláveis na intervenção de ensino

Nesta secção apresentam-se as perceções dos alunos relativamente ao uso de tecnologia e materiais manipuláveis durante a intervenção de ensino. Serão também apresentadas as opiniões dos alunos sobre a importância do trabalho de grupo e das discussões no grupo-turma, como forma de promover a aprendizagem recorrendo aos materiais utilizados. Para avaliar estas perceções foi realizada uma entrevista semiestruturada a cada um dos grupos de trabalho.

Materiais utilizados ao longo da intervenção

Neste ponto analisam-se as respostas dos alunos relativamente ao uso do material manipulável *Algebra Tiles* e do *software GeoGebra*.

Pergunta 1

Sentiram-se mais motivados para aprender matemática quando usaram o material *Algebra Tiles*? E quando usaram o *software GeoGebra*? Porquê?

Todos os alunos se sentiram mais motivados para aprender matemática quando utilizaram o *Algebra Tiles*, considerando que, desta forma, foi mais fácil e divertido aprender os conteúdos lecionados. Vejamos o comentário feito pelos alunos do grupo G_{IV} .

Professora: Sentiram-se mais motivados para aprender matemática quando usaram o *Algebra Tiles*?
Grupo: Sim.
Professora: Porquê?
A_8 : Era mais fácil de trabalhar porque tínhamos as peças e conseguíamos ver melhor.
Professora: Ver melhor!? Como assim?

A_8 : Não tínhamos que imaginar. Tínhamos mesmo as peças e então era mais fácil.

Este comentário mostra que a manipulação do material foi fundamental para uma melhor perceção do que estava a ser abordado ao permitir aos alunos representar os conteúdos por um material em concreto.

Relativamente ao *software GeoGebra* a maior parte dos alunos referiu que também se sentiram motivados para aprender matemática quando o usaram. Vejamos o comentário feito pelo grupo G_V .

Professora: E quando usaram o *GeoGebra* sentiram-se mais motivados?
A_{18} : Sim. É uma forma de explorar matemática com o computador e é mais fácil.
A_{11} : É melhor porque como nós estamos habituados a mexer no computador, ficamos mais à vontade.

No entanto o grupo G_{IV} considerou o *GeoGebra* um pouco confuso no início, tornando-se mais fácil com o decorrer das aulas, como se pode observar no seguinte diálogo.

Professora: E quando usaram o *GeoGebra*?
A_8 : No início era um bocado complicado.
A_6 : Mas depois tornou-se mais fácil.

Para o grupo G_{III} o uso do *GeoGebra* não os motivou. Estes alunos resolviam as tarefas sem recorrerem a este *software*, apenas o utilizavam para confirmar resultados.

Professora: E quando usaram o *GeoGebra* sentiram-se motivados?
Grupo: Não.
Professora: Porquê?
A_5 : Porque não usávamos.
Professora: Não? Resolviam as tarefas sem usar o *GeoGebra*?
Grupo: Sim.
A_{13} : Só usávamos para confirmar resultados.
A_5 Exato.

Pergunta 2

Usaram o material *Algebra Tiles* e o *software GeoGebra* apenas quando a professora o recomendou, ou também os usaram por vossa iniciativa? Para que usaram estes materiais quando foram vocês a decidir usá-los?

Pela análise das entrevistas verificou-se que todos os alunos não utilizaram apenas o *Algebra Tiles* quando lhes foi solicitado, também o utilizaram por iniciativa própria. Estes consideraram que se tornava mais fácil resolver a tarefa recorrendo a este material. Além disso, o grupo G_{III} ainda referiu que, relativamente às tarefas em que era necessário completar o quadrado, preferiam utilizar o *Algebra Tiles* em vez de recorrer a processos exclusivamente analíticos.

No que diz respeito ao *GeoGebra*, a maior parte dos alunos referiu que só o utilizaram quando lhes foi recomendado. Os alunos que o utilizaram apenas o fizeram para confrontar os resultados obtidos com papel e lápis.

Vejamos o diálogo do grupo G_{II} relativamente a esta questão.

> *Professora*: Usaram o *Algebra Tiles* e o *GeoGebra* só quando foi recomendado ou também por vossa iniciativa?
> A_7 : O *Algebra Tiles* usámos por nossa iniciativa.
> *Professora*: E por que usavam?
> A_{14} : Assim era mais fácil.
> *Professora*: Então usaram sempre, mesmo que não fosse pedido?
> A_7 : O *GeoGebra* não.
> *Professora*: Só quando foi recomendado?
> *Grupo*: Sim.
> A_1 : Mas nas equações íamos ao *GeoGebra* para confirmar os resultados.

Pergunta 3

Que vantagens reconhecem no uso do material *Algebra Tiles* para aprender matemática? E desvantagens?

Ao longo das entrevistas os alunos identificaram várias vantagens no uso do *Algebra Tiles*, tais como: menos margem de erro; torna as aulas diferentes e a matemática mais interessante; ajuda na resolução das tarefas, o que faz com que seja mais fácil aprender a matéria e ainda mencionaram que é mais fácil simplificar através do *Algebra Tiles* do que por outro processo. Esta última vantagem mostra que alguns alunos foram capazes de reconhecer um dos grandes potenciais deste material.

As desvantagens mencionadas centraram-se no facto de as peças serem pequenas e de ser fundamental conhecer bem o funcionamento do material.

Pergunta 4

Que vantagens reconhecem no uso do software *GeoGebra* para aprender matemática? E desvantagens?

A única vantagem que todos os alunos mencionaram no uso do *GeoGebra* foi o facto de este ser útil para confirmar resultados. Por outro lado, consideraram também este *software* um pouco complicado de usar, tornando-se assim numa desvantagem. Como exemplo, vejamos o comentário do grupo G_{II}.

> *Professora*: Que vantagens reconhecem no uso do *GeoGebra* para aprender matemática?
> A_7 : Facilita a resolução de equações.
> A_1 : Pois, porque podemos confirmar os resultados.
> *Professora*: E desvantagens?
> A_{19} : É um bocado confuso.

Pergunta 5
Sentiram dificuldades na utilização do *Algebra Tiles*? E do *GeoGebra*? Que dificuldades sentiram? Como as superaram?

Todos os alunos referiram que apenas no início sentiram dificuldades na utilização do *Algebra Tiles*, uma vez que ainda estavam a aprender como este material funcionava. Uma forma de ultrapassar essas dificuldades foi praticando várias vezes e solicitando a ajuda da professora, como se refere no comentário feito pelo aluno A_9.

> A_9: No início tínhamos dificuldade com as peças, mas sem as peças não percebíamos mesmo nada. Depois aprendemos a mexer devagar, ultrapassamos esse nível e agora já conseguimos sem as peças.

Neste comentário é notório que, com o decorrer do tempo, alguns alunos foram capazes de deixar de parte o material para responder às tarefas propostas.

Como já foi observado nas perguntas anteriores, foi mais confuso para os alunos o uso do *GeoGebra*, sendo que na maior parte das vezes era necessária a minha intervenção nos grupos. Para além disso, os alunos sentiram dificuldades em interpretar os resultados obtidos com o *GeoGebra*.

Pergunta 6
Preferiram utilizar o material *Algebra Tiles* ou o software *GeoGebra* para aprender matemática? Por que razão ou razões?

O *Algebra Tiles* foi o material preferido por todos os alunos, uma vez que o consideraram mais fácil, divertido e eficaz. Além disso, voltaram a reforçar a ideia de que com o uso deste material foi mais fácil a compreensão dos conteúdos.

Pergunta 7

No futuro, gostavam de usar novamente o *software GeoGebra* para aprender outros temas de matemática? Por que razão ou razões?

Um dos grupos entrevistados referiu que gostava de usar novamente o *GeoGebra*, argumentando que o uso de materiais torna as aulas mais dinâmicas. Outro grupo mencionou que gostaria de voltar a usar este programa caso "ajude e seja fácil na compreensão da matéria". Os três grupos restantes referiram que não gostariam de voltar a usar o *GeoGebra* porque o acharam confuso.

Trabalho de grupo e discussões no grupo-turma

Serão agora analisadas as respostas dos alunos relativamente à importância do trabalho de grupo e das discussões no grupo-turma.

Pergunta 8

Para vós, foi importante terem trabalhado em grupo? Porquê?

Os alunos consideraram que o trabalho de grupo foi muito importante para a sua aprendizagem. Estes salientaram que esta metodologia de trabalho permitiu esclarecer dúvidas com os elementos do grupo, não necessitando de recorrer constantemente à ajuda do professor, permitindo discutir ideias e tornando-se mais autónomos. Os alunos referiram que esta metodologia promove o espírito de interajuda e que influenciou na compreensão dos conteúdos abordados. É de salientar o comentário feito pelo aluno A_{19}.

Professora: Foi importante terem trabalhado em grupo?
Grupo: Sim.
A_{19}: No início estava noutro grupo, não fazia parte deste grupo. E por isso é que tirava negativa, porque no outro grupo era muito mais conversa, brincadeira e não percebia a matéria.

Por observação do comentário feito pelo aluno A_{19} verifica-se que a constituição do grupo tem influência na aprendizagem dos seus elementos.

Pergunta 9

Que vantagens e desvantagens reconhecem ao trabalho em grupo?

Foram várias as vantagens que os alunos referiram acerca de trabalharem de grupo, designadamente: permite tirar mais conclusões; perceber melhor a matéria; adquirir mais conhecimentos; motivar para o trabalho; aumentar o espírito de interajuda; ajudar na melhoria das notas e o facto de a linguagem entre alunos ser diferente da que usam quando falam com o professor proporciona uma melhor perceção dos conteúdos abordados.

Como desvantagens, os alunos referiram que, por vezes, o trabalho em grupo propicia conversas extra-aula e gera um pouco de barulho enquanto debatem ideias.

Pergunta 10

Depois de terem trabalho no grupo, seguiram-se momentos de discussão em toda a turma, incluindo a professora. Que vantagens e desvantagens reconhecem a estes momentos de discussão?

Relativamente aos momentos de discussão no grupo-turma, os alunos consideraram que são vantajosos, pois permitem partilhar opiniões, diferentes métodos de resolução, corrigir e perceber porque erraram. O barulho e a confusão que, por vezes, se instala nestes momentos de discussão foram vistos como desvantagens.

CAPÍTULO IV
CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES

Neste capítulo, divido em três secções, apresenta-se os principais resultados deste estudo. Na primeira secção apresentam-se as conclusões deste estudo, na segunda secção apresentam-se algumas implicações do estudo para o ensino e aprendizagem e, por fim, a terceira secção diz respeito às limitações deste estudo e nele são feitas também recomendações para futuras investigações.

4.1. Conclusões

Nesta secção descrevem-se as principais conclusões deste estudo, tendo por referência cada um dos objetivos estabelecidos na investigação.

4.1.1. Objetivo 1 – Descrever a forma como foram usados os materiais manipuláveis e a tecnologia na realização das tarefas propostas

Durante a intervenção de ensino era importante que os alunos estivessem à vontade na manipulação dos materiais manipuláveis e na tecnologia. Como tal, a forma como estes recursos foram usados foi fundamental para o processo ensino e aprendizagem.

Referimo-nos, seguidamente, ao *Algebra Tiles* e ao *GeoGebra*, que foram recursos usados na intervenção de ensino.

Algebra Tiles. Cada um dos alunos teve à sua disposição as peças do *Algebra Tiles*. Foi importante cada aluno ter as suas próprias peças para poder manipular e não apenas um dos elementos do grupo.

Como referem Leitze e Kitt (2000), antes de se utilizar o *Algebra Tiles* é importante tornar claro aos alunos quais são as expectativas em relação ao uso apropriado deste material. Para isso, foi apresentado aos alunos, na primeira aula, um PowerPoint (Anexo VI) referindo o que é o *Algebra Tiles* e como funciona.

Para estes autores a exploração deste material por parte dos alunos é um ponto importante. Desta forma, o *Algebra Tiles* foi utilizado na introdução do tópico casos notáveis da multiplicação para, assim, os alunos se adaptaram ao material e ficarem mais à-vontade quando estudaram os tópicos fatorização e equações do 2º grau, que foram os tópicos centrais deste estudo.

Este material foi bastante importante para a fatorização de polinómios e facilitou a resolução de equações do 2º grau, pois a forma como este material foi utilizado no estudo destas equações centrou-se na fatorização dos seus primeiros membros.

Entendi que a melhor forma de conciliar o *Algebra Tiles* com os tópicos abordados foi partir de exemplos concretos para assim introduzir os conceitos. Penso que a utilização deste material facilitou aos alunos a aprendizagem dos conceitos abordados, pois permitiu, a partir de exemplos concretos, passar por uma fase ilustrativa, e finalmente obter as representações simbólicas.

Quando foram introduzidos os conceitos, os alunos dependiam do *Algebra Tiles* para resolver e responder às tarefas propostas. Num nível superior, os alunos manipulavam o *Algebra Tiles* e conseguiam fazer um esboço do que era obtido. Esta forma de usar o *Algebra Tiles* fez com que estes esboços se tornassem representações visuais que permitiram aos alunos estabelecer manipulações com papel e lápis. Estes resultados são compatíveis com o que referem Leitze e Kitt (2000).

Nas tarefas de consolidação de conhecimentos, como forma de analisar a influência do *Algebra Tiles* na resolução das tarefas propostas, nem sempre era dito aos alunos que o utilizassem. O que se verificou ao longo de toda a intervenção foi que os alunos o utilizaram na maioria das tarefas, considerando que a utilização do *Algebra Tiles* na realização das tarefas as tornava mais fáceis e em determinadas tarefas a utilização deste material era a única forma que os alunos encontravam para as resolverem.

Com o decorrer das aulas foi notória a evolução dos alunos na forma como usavam o *Algebra Tiles*, tornava-se cada vez mais fácil para os alunos fazerem o esboço com papel e lápis não usando as peças do *Algebra Tiles*. Este resultado foi positivo para este estudo, uma vez que era o que se esperava dos alunos.

GeoGebra. A forma que se considerou ser mais eficaz de distribuir os computadores foi disponibilizar a cada grupo um computador, pois com esta estratégia promovia-se as interações entre os diferentes membros do grupo.

Este *software* começou por ser utilizado para introduzir o tópico equações do 2º grau. No estudo das equações do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, para determinarem as soluções das equações $x^2 = 1$ e $x^2 = -1$ os alunos partiram da representação gráfica da equação $y = x^2$, uma vez que este *software* permite relacionar as informações dadas algebricamente com as representações gráficas, tal como refere Ponte et al. (2009).

Nas equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, com a e $b \neq 0$, e do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e $c \neq 0$, o *GeoGebra* foi utilizado da mesma forma. Para tal, foi fornecida aos alunos uma construção feita no *GeoGebra*, que permitia variar cada um dos parâmetros a, b e c de uma equação do 2º grau. Com esta construção os alunos, através do que obtinham tiveram de descobrir quantas e quais as soluções das equações que lhes foram apresentadas. Numa fase inicial, foi um pouco difícil para os alunos interpretarem o que obtinham no *GeoGebra*; no entanto, com a ajuda dos colegas de grupo e da professora essas dificuldades foram sendo ultrapassadas.

É de salientar que a forma como o *GeoGebra* foi utilizado foi pensada de maneira a não dispensar o trabalho com papel e lápis, seguindo assim as orientações de Ponte et al. (2009) e Fernandes e Vaz (1998).

Para o estudo das equações do 2º grau o *Algebra Tiles* e o *GeoGebra* foram utilizados em simultâneo. Considero que a forma como estes dois materiais foram utlizados facilitou aos alunos a aprendizagem da resolução de equações do 2º grau, pois estes materiais facilitaram o trabalho dos alunos em determinadas etapas da resolução de uma equação do 2º grau. Ou seja, na resolução destas equações normalmente os alunos tinham que fatorizar o primeiro membro das mesmas, o que conseguiam facilmente utilizando o *Algebra Tiles*, e posteriormente resolviam a equação podendo confirmar com o *GeoGebra* se as soluções obtidas analiticamente estavam corretas.

4.1.2. Objetivo 2 – Reconhecer vantagens e desvantagens do uso de materiais manipuláveis e tecnologia na fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau

Durante a intervenção de ensino observaram-se várias vantagens e desvantagens do uso do *Algebra Tiles* e do *software GeoGebra* na fatorização de polinómios e na resolução de equações do 2º grau.

Algebra Tiles. Para uma manipulação fácil do *Algebra Tiles* é necessário perceber bem o seu funcionamento. Durante toda a intervenção de ensino notou-se que os alunos manipularam com destreza e facilidade este material, o que se tornou vantajoso para o processo ensino e aprendizagem.

A utilização deste material manipulável motivou a aprendizagem dos alunos, o que é compatível com o que refere Nogueira (2005). Além disso, os resultados obtidos neste estudo também vão de encontro ao que refere Santos (2011), na medida em que a utilização do *Algebra Tiles* favoreceu a relação entre os alunos.

Em algumas tarefas, por exemplo no caso da alínea a) da tarefa 10, que foi analisada no capítulo III, com a utilização deste material verificou-se que existiu menor margem de erro. Isto porque, nessa tarefa, um aluno começou por resolvê-la analiticamente obtendo um resultado incorreto, e posteriormente optou por recorrer ao *Algebra Tiles* para a sua resolução obtendo a resposta correta.

No caso do estudo dos casos notáveis da multiplicação o uso do *Algebra Tiles* proporcionou aos alunos a memorização dos esquemas que obtinham para os seus desenvolvimentos. Assim, ficou presente nos alunos que no desenvolvimentos dos casos notáveis obtinham sempre três termos, o termo em x^2, o termo em x e o termo independente. Desta forma, o uso deste material foi vantajoso, uma vez que fez com que alguns alunos ultrapassassem o erro mais comum, quando dizem que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

Outra grande vantagem do *Algebra Tiles* diz respeito à fatorização de polinómios. Muitas vezes os alunos têm dificuldades em saber o que devem fazer para fatorizar um polinómio. Neste caso, o *Algebra Tiles* apresenta um grande potencial pois facilita bastante na fatorização de polinómios. Notou-se durante toda a intervenção que era fácil para os alunos fatorizarem polinómios usando este material. Mesmo depois de terem estudado analiticamente como fatorizar polinómios, estes alunos continuavam a recorrer ao *Algebra Tiles* para o fazer.

No que diz respeito às desvantagens e, de acordo com o que foi analisado no capítulo III, a utilização deste material mostrou ter menos desvantagens do que vantagens. Foi algumas vezes referido pelos alunos o facto de as peças serem um pouco pequenas, pois na verdade os quadrados pequenos tinham de lado um centímetro.

O *Algebra Tiles* permite multiplicar ou fatorizar polinómios; no entanto, isso só se verifica com polinómios até ao segundo grau. Além disso, o número de peças é uma limitação porque não permite resolver equações com os coeficientes dos seus termos muito grandes.

GeoGebra. Uma vantagem deste *software* é que, além de incorporar todas as características de um programa de geometria dinâmica no plano, pode ser utlizado no estudo da Álgebra, pois tem características semelhantes à calculadora gráfica, tal como referem Carreira e

Jacinto (2011). Por outro lado, o uso da tecnologia motivou os alunos na sua aprendizagem e na resolução, tal como referem Amado e Carreira (2008).

Para a resolução da tarefa 11 foi importante o facto de o *GeoGebra* permitir relacionar as informações dadas algebricamente com as representações gráficas, vantagem que foi apontada por Ponte et al. (2009).

Outra vantagem que se evidenciou com a utilização deste *software* foi a confirmação de resultados. Muitos alunos depois de resolverem analiticamente uma equação do 2º grau recorriam ao *GeoGebra* para confirmar se as soluções estavam corretas.

Relativamente às desvantagens na utilização da tecnologia, salientou-se o maior ruído existente na aula, o que também foi referido por Amado e Carreira (2008). Neste caso, alguns alunos consideraram que o manuseamento deste *software* é um pouco confuso. Além disso, devido a algumas dificuldades sentidas por parte dos alunos no seu manuseamento, verificaram-se perdas de tempo.

4.1.3. Objetivo 3 – Avaliar as perceções dos alunos sobre o uso de materiais manipuláveis e tecnologia na fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau

Com as entrevistas realizadas aos grupos de trabalho pretendeu-se averiguar as perceções dos alunos relativamente aos materiais utilizados durante a intervenção, ao trabalho de grupo e às discussões no grupo-turma.

Algebra Tiles. Todos os alunos se sentiram mais motivados para aprender matemática quando utilizaram o *Algebra Tiles*. Para um grupo de alunos, o facto de terem as peças tornava a resolução das tarefas mais fácil. Comparando este resultado com Leitze e Kitt (2000) verifica-se que eles apontam na mesma direção, pois estes autores referem que o método com o qual têm tido sucesso utiliza o *Algebra Tiles* como modelos concretos.

Quanto às vantagens no uso do *Algebra Tiles*, os alunos enumeraram várias. É de destacar o facto de terem referido que é mais fácil simplificar através do *Algebra Tiles* do que por outro processo. Esta vantagem que os alunos mencionaram vai de encontro ao que referem Leitze e Kitt (2000) quando afirmam que a fatorização é um conceito algébrico que pode ser introduzido e desenvolvido utilizando o *Algebra Tiles*. Como desvantagens deste material, os alunos mencionaram o tamanho das peças (muito pequenas) e o ter que conhecer muito bem o seu funcionamento.

Todos os alunos sentiram dificuldade na manipulação do *Algebra Tiles*, mas apenas no início, pois ainda estavam a aprender a trabalhar com o material. Uma forma de ultrapassar esta dificuldade foi praticar várias vezes e recorrer à ajuda da professora. Um grupo referiu ainda que no início tiveram dificuldade com as peças, mas sem as peças não percebiam mesmo nada. Depois aprenderam a manipular devagar, ultrapassando esse nível e, por fim, já conseguiam resolver as tarefas sem as peças. Este resultado é compatível com o que é referido por Leitze e Kitt (2000) quando afirmam que com este material, ao sequenciar a instrução a partir de um nível concreto, passando pelo nível ilustrativo e finalmente passando ao nível abstrato ou simbólico, conseguem ganhar a adesão de mais alunos.

O *Algebra Tiles* foi o material preferido por todos os alunos, tendo sido visto como um material fácil, divertido e eficaz. Além disso, todos os alunos referiram que com o uso deste material foi mãos fácil compreender os conteúdos abordados.

GeoGebra. Para a maior parte dos alunos o *GeoGebra* foi motivante para aprender matemática, o que é compatível com o que referem Amado e Carreira (2008) quando afirmam que os computadores motivam os alunos para aprender Matemática. Um grupo referiu ainda que como estão habituados a mexer no computador, sentem-se mais à-vontade.

Um grupo mencionou que no início a sua manipulação era um pouco complicada, mas que com o decorrer das aulas tornou-se mais fácil. A maior parte dos alunos apenas utilizaram o *GeoGebra* quando lhes foi recomendado.

A única vantagem referida pelos alunos no uso deste *software* foi o facto de ser útil para confirmar resultados. Os alunos consideraram que foi um bocado complicado manipular estes *software*, referindo esta dificuldade como uma desvantagem. Além disso, sentiram dificuldades em interpretar os resultados obtidos.

Um dos grupos entrevistados referiu que gostava de usar novamente o *GeoGebra*, pois torna as aulas mais dinâmicas.

Trabalho de grupo. Todos os alunos gostaram de trabalhar em grupo e consideraram que esta metodologia de ensino foi importante para a aprendizagem, pois permitiu-lhes ultrapassar dúvidas e dificuldades. Além disso, o facto de estarem a trabalhar em grupo também os motivou para a realização das tarefas propostas. Os resultados deste estudo seguem um comportamento semelhante aos resultados obtidos no estudo feito por Roa, Correia e Fernandes (2009).

Discussões no grupo-turma. Todos os alunos consideraram que estes momentos de discussão foram bastante vantajosos. Para estes alunos estes momentos permitiram partilhar opiniões, o que está de acordo com o que referem Ponte e Serrazina (2000) quando afirmam que a comunicação através da linguagem oral é fundamental para que os alunos possam exprimir as suas ideias e confrontá-las com as ideias dos seus colegas. A única desvantagem que os alunos mencionaram nestes momentos de discussão foi o barulho que por vezes se pode instalar.

4.2. Implicações para o ensino e aprendizagem

Deste estudo resultam várias implicações para o ensino e aprendizagem da Álgebra com recurso aos materiais manipuláveis e à tecnologia.

Dos resultados obtidos verificaram-se muitas vantagens no uso dos materiais manipuláveis e da tecnologia, muito importantes para o processo ensino e aprendizagem da Álgebra. Além disso, também se constatou que é muito importante o professor entender como deve utilizar estes recursos na sala de aula. Também está patente neste estudo a importância de o professor conjugar a utilização destes recursos com outros meios, como papel e lápis, e proporcionar atividades interessantes e motivadoras para a aprendizagem dos alunos.

É importante que os professores aprofundem a utilização de materiais didáticos pois, como revelou este estudo, essa utilização pode contribuir para motivar os alunos e aprofundar a sua compreensão da matemática.

Neste trabalho averiguaram-se as perceções dos alunos relativamente ao uso dos materiais manipuláveis e da tecnologia, tendo-se verificado que os alunos se sentiram mais motivados para a aprender matemática e reconheceram vantagens e desvantagens dessa utilização.

Por outro lado, o trabalho de grupo e as discussões havidas no grupo-turma também se mostraram ser fundamentais para o sucesso do processo de ensino e aprendizagem. Foi evidenciado, neste estudo, que o trabalho de grupo motivou bastante os alunos na realização das tarefas proposta e que com as discussões os alunos puderam expor as suas ideias para o resto da turma e conhecer as dos restantes colegas.

Deste estudo também resultaram algumas desvantagens do uso destes materiais. Contudo, se a utilização em sala de aula destes materiais se tornar um hábito, algumas destas desvantagens, como a dificuldade na sua manipulação, poderão desaparecer. O ruído em sala de aula é normal que seja maior, pois numa aula com materiais manipuláveis ou tecnologia os alunos estão muito mais envolvidos.

Este projeto revelou-se crucial para o desenvolvimento da professora-autora, na medida em que teve a oportunidade de conhecer e pôr em prática estratégias de ensino e aprendizagem novas e inovadoras. Desta forma, pretende continuar a aplicar diferentes metodologias e estratégias sempre que contribuam para o desenvolvimento e sucesso dos alunos.

4.3. Recomendações e limitações

Considera-se que este estudo respondeu aos objetivos propostos. No entanto, durante a sua realização foram surgindo algumas limitações.

Era importante que, antes de os alunos utilizarem o *Algebra Tiles* nos conteúdos pretendidos, estes o explorassem à vontade, satisfazendo as suas curiosidades. No entanto, isto não foi possível, pois o tempo que é estipulado para a intervenção é um pouco curto, constituindo, assim, uma limitação para o estudo.

Também ao longo da realização deste estudo foram surgindo questões que podem ser objeto de futuras investigações, de que se destacam os dois seguintes.

Uma vez que a utilização de recursos educativos deve ser cada vez mais pensada e aplicada pelos professores em sala de aula, seria interessante estudar se as perceções que o professor tem acerca dos materiais manipuláveis e da tecnologia influenciam na aprendizagem dos alunos.

Durante a intervenção foram detetados erros e dificuldades na resolução de equações do 2º grau. Neste caso, também seria interessante estudar os erros e as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de equações do 2º grau, identificando esses erros e dificuldades e descrevendo as formas como os alunos os ultrapassam.

BIBLIOGRAFIA

Almeida, M. G. & Fernandes, J. A. (2010). A comunicação promovida por futuros professores na aula de Matemática. *Zetetiké*, vol. 18, nº 34, 109-154.

Amado, N. & Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de matemática – diferenças na prática de sala de aula. In A.P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e educação Matemática* (pp. 286-299). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação – Secção de Educação Matemática.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Botas, D. S. (2008). A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática: um estudo no 1º ciclo. Dissertação de mestrado, Universidade Aberta, Lisboa, Portugal.

Burns, Marylin (1990). The Math Solution: using groups of four. Em Neil Davidson (Ed.), Cooperative Learning in Mathematics. Addison – Wesley.

Carreira, S. & Jacinto, H. (2011). Tecnologias e Recursos no Ensino e Aprendizagem da Matemática. In *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Correia, P. F. (2011). Informação para o conselho de turma. Documento policopiado, Escola Secundária/3 de Barcelos.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Fernandes, J. A. & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de Matemática? *Boletim da SPM*, 39, 43-55.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Leitze, A. R. & Kitt, N. A. (2000). Using homemade Algebra Tiles to develop algebra and prealgebra concepts. *Mathematics Teacher*, vol. 93, nº 6, 462-466 e 520.

Lopes, V. (2010). *A Utilização de Materiais Didáticos no Ensino da Matemática ao nível do Ensino Secundário de Timor-Leste*. Tese de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Martinho, M. H. & Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In *Atas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 273-293). Évora: Associação de Professores de Matemática.

Matos, J. M & Serrazina, M. L. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Mourão, A. P., Barros, A. M., Almeida, L. S. & Fernandes, J. A. (1993). O baixo desempenho na Matemática: avaliação para a definição do programa. In L. S. Almeida, J. A. Fernandes & A. P. Mourão (Orgs.). *Ensino-Aprendizagem da Matemática: Recuperação de Alunos com Baixo Desempenho* (pp. 63-89). Vila Nova de Famalicão: Didáxis.

Moyer P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 175–197.

Nabais, M. M. S. (2010). Equações do 2º grau: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9º ano. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

NCTM (2007). Princípios e normas para a matemática escolar. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Nogueira, C. M. I. & Andrade, D. (2005). Educação Matemática e as operações fundamentais. (Formação de professores, EAD, nº 21). Maringá: EDUEM.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática para do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*, nº 100, 89-96.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Raposo, R. P. (2011). Novas ferramentas, dentro e fora da sala de aula. *Educação e Matemática*, nº 113, 37-42.

Roa, R., Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2009). Percepciones de los estudiantes de una clase de bachillerato sobre una intervención de enseñanza en Combinatoria. In María Guzmán P. (Coord.), *Arte, Humanidades y Educación: Aportaciones a sus ámbitos científicos* (pp. 323-347). Granada, Espanha: Editorial Atrio.

Santos, D. C. (2011). *O uso de materiais manipuláveis como ferramenta na resolução de problemas trigonométricos*. Dissertação de mestrado, Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, Brasil.

Serrazina, M. L. (1991). Aprendizagem da Matemática: a importância da utilização de materiais. *Noesis*, nº 21, 37-38.

Soares, M. J. (2005). O ensino de equações lineares no 8º ano de escolaridade: Uso de calculadoras, erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Viseu, F. (2009). *A formação do professor de matemática, apoiada por um dispositivo de interação virtual no estágio pedagógico*. Centro de investigação em educação. Universidade do Minho. Braga.

ANEXOS

ANEXO I

Pedido de autorização ao Diretor da Escola

Exmo. Senhor Diretor

da Escola__________________

Nós, alunos do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, e professores estagiários de Matemática da Escola, encontramo-nos na fase de implementação dos projetos de intervenção pedagógica supervisionada, intitulados:

- *Utilização de materiais manipuláveis e tecnologia no ensino e aprendizagem da fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau no 8º ano* (Marta da Silva Teixeira);
- *Exploração do significado das expressões como forma de promover a aprendizagem de equações literais e polinómios no 8º ano*, (Pedro Marcelo Pereira dos Santos Silva);
- *Erros e dificuldades no processo de ensinar e aprender a resolver sistemas de duas equações do 1º grau no 8º ano*, (Sónia Andreia Oliveira da Silva).

Ora, para a implementação do projeto de intervenção pedagógica supervisionada, é necessário proceder à recolha de dados que, em parte, consiste em gravações audiovisuais de algumas aulas da disciplina de Matemática do 8º ano, na turma D. Para tal, vimos solicitar a autorização de V. Ex.ª para gravarmos em vídeo e áudio essas aulas. Pela nossa parte, comprometemo-nos a usar os dados apenas para fins académicos e a garantir o anonimato da identidade dos alunos.

Caso V. Ex.ª. autorize a gravação das aulas, comprometemo-nos ainda a solicitar aos encarregados de educação a devida autorização para a recolha de registos audiovisuais durante a intervenção de ensino, assumindo igualmente o compromisso em garantir o anonimato da identidade dos alunos.

Certos da melhor atenção que o pedido merecerá da parte de V. Ex.ª, subscrevemo-nos com os melhores cumprimentos.

Barcelos, 31 de janeiro de 2012

Os professores estagiários

____

(Marta da Silva Teixeira)

____

(Pedro Marcelo Pereira dos Santos Silva)

____

(Sónia Andreia Oliveira da Silva)

Autorização

____ de __________ de 2012

O Diretor

____

(Jorge Manuel Fernandes Vaz Saleiro)

ANEXO II

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo.(a) Senhor(a)

Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)

____

nº ______ da turma ___ do 8º ano.

Nós, alunos do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, e professores estagiários de Matemática da Escola, encontramo-nos na fase de implementação dos projetos de intervenção pedagógica supervisionada, intitulados:

- *Utilização de materiais manipuláveis e tecnologia no ensino e aprendizagem da fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau no 8º ano* (Marta da Silva Teixeira);
- *Exploração do significado das expressões como forma de promover a aprendizagem de equações literais e polinómios no 8º ano*, (Pedro Marcelo Pereira dos Santos Silva);
- *Erros e dificuldades no processo de ensinar e aprender a resolver sistemas de duas equações do 1º grau no 8º ano*, (Sónia Andreia Oliveira da Silva).

Ora, para a implementação do projeto de intervenção pedagógica supervisionada, é necessário proceder à recolha de dados que, em parte, consiste em gravações audiovisuais de algumas aulas da disciplina de Matemática do 8º ano, na turma D. Para tal, e uma vez obtida a autorização do Diretor da escola, vimos solicitar também a autorização de V. Ex.ª.

Pela nossa parte, comprometemo-nos a usar os dados apenas para fins académicos e a garantir o anonimato da identidade dos alunos.

Agradecendo desde já a atenção de V. Ex.ª, subscrevemo-nos com os melhores cumprimentos.

Escola______________, 31 de janeiro de 2012

Os professores estagiários	Autorização
______________________________	____ de ___________ de 2012
(Marta da Silva Teixeira)	Assinatura do(a) encarregado(a) de educação
______________________________	______________________________
(Pedro Marcelo Pereira dos Santos Silva)	
______________________________	
(Sónia Andreia Oliveira da Silva)	

ANEXO III

Ficha de avaliação por partes

MATEMÁTICA 8º ANO DE ESCOLARIDADE

Ficha por partes de 22 de maio de 2012

Ano letivo 2011/2012

Nº_____ Nome:____

Nota objetivo:_______ Nota esperada:________ Nota do teste:_________ E. Educação:______________________

1. Sobre dois números a e b sabe-se que:
   - $a-b=9$
   - $ab=36$

   Sem determinares os valores de a e b, calcula o valor das seguintes expressões

   a) $2ab$

   b) $2a-2b$

   c) $a^2-2ab+b^2$

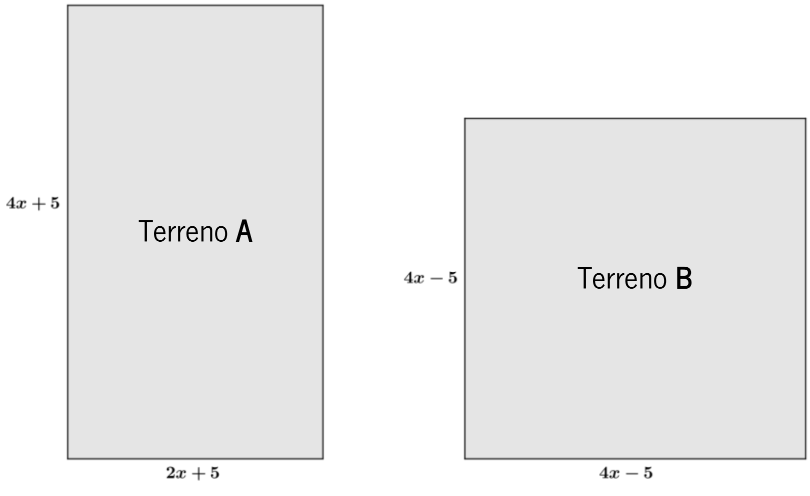
2. Numa sala de aula está afixado um quadro cuja altura é metade da largura.

   a) Representa por x a largura do quadro e escreve uma expressão algébrica que represente a área do quadro.

   b) Sabe-se que a área do quadro é de 392 dm^2. Determina as suas dimensões.

3. O Senhor José deu um terreno a cada um dos seus dois filhos. Deu o terreno **A** ao João e o terreno **B** à Joana.

   Atendendo às medidas assinaladas na figura seguinte, determina o valor de x de modo a que os dois irmãos fiquem com terrenos de igual área.



4. Resolve cada uma das seguintes equações.

a) $x^2 + 9 = 0$

b) $3x\left(\frac{x}{2} - 1\right) = -4x$

c) $4x^2 - 8x + 4 = 0$

d) $(x-3)^2 - 1 = 0$

5. Explicando como procedeste, indica um valor para **a** de modo que a equação $x^2 - \mathbf{a} = 0$ tenha exatamente:

a) Zero soluções

b) Uma solução

c) Duas soluções

Bom trabalho! ☺

Questão	1. a)	1. b)	1. c)	2. a)	2. b)	3	4	5
Cotação	4%	6%	9%	6%	10%	15%	4×8%	3×6%

ANEXO IV

Entrevista

Guião da Entrevista

Avaliar as perceções dos alunos sobre o uso de materiais manipuláveis e tecnologia na fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau.

— Sentiram-se mais motivado para aprender matemática quando usaram o material *Algebra Tiles*? E quando usaram o software *GeoGebra*? Porquê?

— Usaram o material *Algebra Tiles* e o software *GeoGebra* apenas quando a professora o recomendou, ou também os usaram por vossa iniciativa? Para que usaram estes materiais quando foram vós a decidir usá-los?

— Que vantagens reconhecem no uso do material *Algebra Tiles* para aprender matemática? E desvantagens?

— Que vantagens reconhecem no uso do software *GeoGebra* para aprender matemática? E desvantagens?

— Sentiram dificuldades na utilização do *Algebra Tiles*? E do *GeoGebra*? Que dificuldades sentiram? Como as superaram?

— Preferiram utilizar o material *Algebra Tiles* ou o software *GeoGebra* para aprender matemática? Por que razão ou razões?

— No futuro, gostavam de usar novamente o software *GeoGebra* para aprender outros temas de matemática? Por que razão ou razões?

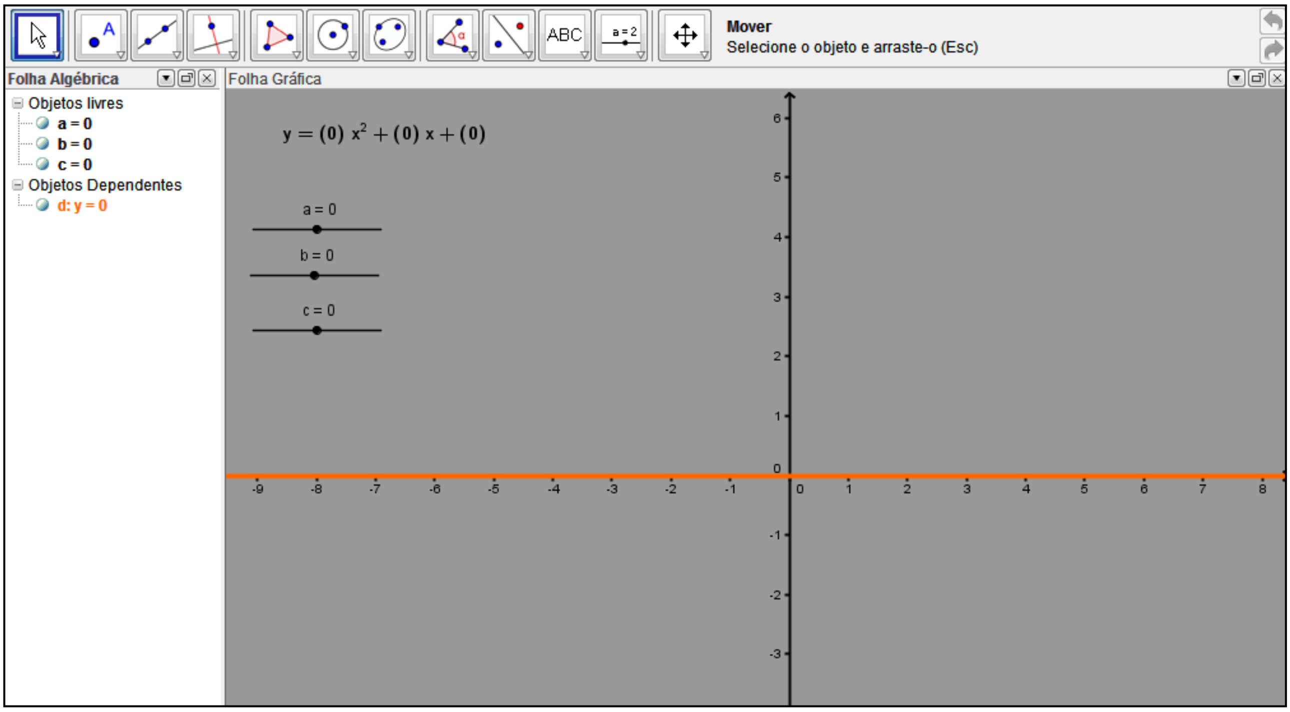
— Para vós, foi importante terem trabalhado em grupo? Porquê?

— Que vantagens e desvantagens reconhecem ao trabalho de grupo?

— Depois de terem trabalho no grupo, seguiram-se momentos de discussão em toda a turma, incluindo a professora. Que vantagens e desvantagens reconhecem a estes momentos de discussão?

ANEXO V

Construção feita no *GeoGebra*



Mover
Selecione o objeto e arraste-o (Esc)
Folha Algébrica
Objetos livres
a = 0
b = 0
c = 0
Objetos Dependentes
d: y = 0
Folha Gráfica
y = (0) x² + (0) x + (0)
a = 0
b = 0
c = 0

ANEXO VI

PowerPoint

ALGEBRA TILES

Ano letivo 2011/2012

A professora estagiária, *Marta da Silva Teixeira*

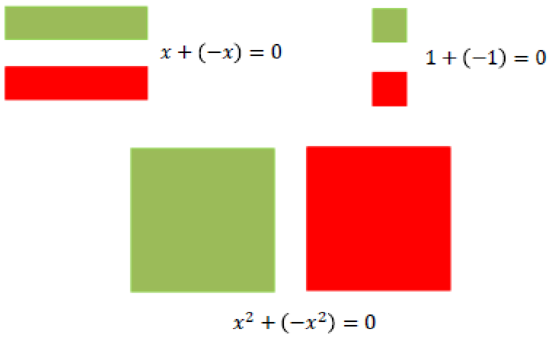
O orientador, *Paulo A. Ferreira Correia*

O que são os *Algebra Tiles*?

- São pequenas peças manipuláveis e que se apresentam sob três formas: pequenos quadrados, quadrados maiores e retângulos.

- Para representar estes formatos existem duas cores: a cor verde que representa os valores positivos e a cor vermelha que representa os valores negativos.

Nota:



Operações: